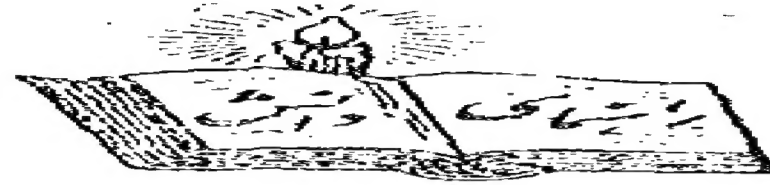




پیشکش - انواری



خدا  
سوره  
مشرقی

چاپ اولی - ۱۴۴۶

شرکت سهامی چاپ

نفس علوم (۱۴)

۳۸۵

حق چاپ و استفاده از کلیشه ها  
محفوظ است

Copyright © 2002

M.A. LIBRARY, A.M.U.



PE3285

## زائده‌های کتاب



لب کتاب را بطوریکه  
در شکل بالا می بینید  
کمی باز کنید؛ نشانی  
سیاهی که در مقابل  
علامت ... این صفحه  
بمخازات هر قسمت  
نمودار میشود صفحه اول  
آن قسمت از مطالب  
کتاب است انگشت  
شست درست چپ را روی  
نشانی سیاه بگذارید  
و قسمتی را که  
میخواهید باز کنید.

## حساب

از صفحه ۱ تا صفحه ۳۸

## جبر

از صفحه ۳۹ تا ۱۲۸

## مثلثات

از صفحه ۱۲۹ تا ۱۶۳

## هندسه

از صفحه ۱۶۴ تا ۲۳۶

## منحرف و طوالت

از صفحه ۲۳۶ تا ۲۵۴

## مکانیک

از صفحه ۲۵۴ تا ۳۱۹

## هندسه و قومی و تریسیمی

از صفحه ۲۵۴ تا ۲۸۳

## هیدرست

از صفحه ۳۰۲ تا ۳۴۹



## اهداء کتاب

---

این کتاب را بکسانیکه برای  
پیشرفت فرهنگ کمر همت  
بسته و با روحی پاک در این  
راه مردانه می‌گوشند تقدیم  
می‌کنیم

## فهرست

موضوع	صفحه	موضوع	صفحه
قابلیت تقسیم بر ۲ و ۳ و ۴	۷	۱- کلیات	۱
قابلیت تقسیم بر ۵ و ۹ و ۱۱	۸	کمیت	۱
۱- اعداد اول	۸	عدد	۱
اعداد اول از ۱ تا ۱۰۰	۹	پایه شمار	۱
۲- بزرگترین مقسوم علیه مشترک	۱۰	II- جمع	۱
تعیین بعم از راه نردبانی	۱۱	امتحان جمع	۱
«    » از راه تجزیه	۱۱	III- تفریق	۱
۱- کوچکترین مضرب مشترک	۱۱	امتحان تفریق	۱
تعیین کس از راه تجزیه	۱۱	IV- ضرب	۱
II- کسر	۱۱	امتحان ضرب	۱
کسر متعارفی و اعشاری	۱۱	V- تقسیم	۱
کسر نما	۱۱	امتحان تقسیم	۱
خواص عمومی	۱۱	VI- قوای اعداد	۱
چهار عمل اصلی در کسر	۱۵	ضرب و تقسیم قوا	۱
تبدیل کسر اعشاری به متعارفی	۱۵	VII- مساوی و نامساوی	۱
و بالعکس	۱۵	چهار عمل اصلی در مساوی	۱
کسر متناوب	۱۵	»    »    نامساوی	۱
III- نسبت و تناسب	۱۸	VIII- قابلیت تقسیم	۱

موضوع	صفحه
وا-طه عددی	۱۹
XIV-مقیاسها	۲۰
واحد طول در دستگاه متری	۲۰
واحد سطح در دستگاه متری	۲۰
» حجم	۲۱
» پیمانه	۲۱
» وزن	۲۱
رابطه بین وزن و حجم	۲۲
وزن مخصوص	۲۲
واحد پول	۲۲
XV-مقیاسهای سابق ایران	۲۴
واحد طول	۲۴
» وزن	۲۴
رابطه بین مقیاسهای فعلی و قدیم	۲۴
واحد زمان	۲۵
اقسام سال	۲۵
تعدیل	۲۵
مطابقت تاریخها	۲۶
XVI-اعداد مرکب	۲۶
چهار عمل اصلی در اعداد مرکب	۲۶ و ۲۷
XVII-اربعه متناسبه	۲۷
تناسب مستقیم و معکوس	۲۸

موضوع	صفحه
XVIII-T-آمیزه	۲۸
T-لیاژ	۲۹
XIX-مرا بهار مفرد	۲۹
فورمولهای مرا بهار	۲۰
XX-تثزیل	۲۰
فورمول تثزیل	۲۱
XXI-چندر	۲۱
استخراج چندر اعداد صحیح	۲۲
» » » اعشاری	۲۲
تقریب	۲۲
امتحان چندر	۲۴
XXII-کعب	۲۴
استخراج کعب اعداد صحیح	۲۵
» » » اعشاری	۲۶
XXIII-اعداد اصم	۲۶
ضرب و تقسیم ریشه دوم (چندر)	۲۷
جبر	
I-تعاریف	۳۹
حروف و نشانه ها	۳۹
عدد جبری	۴۰
عبارت جبری	۴۱
اتحاد	۴۱

موضوع	صفحه
معادله	۴۱
یکجمله	۴۱
ضرب	۴۱
چند جمله	۴۲
I - جمع اعداد جبری	۴۲
II - تفریق اعداد جبری	۴۲
III - ضرب اعداد جبری	۴۲
V - تقسیم اعداد جبری	۴۲
VI - قوه (توان)	۴۳
ضرب و تقسیم قوا	۴۳
قوه کسری	۴۴
قوه منفی	۴۴
VII - جمع جمل جبری	۴۵
VIII - تفریق جمل جبری	۴۵
IX - ضرب جمل جبری	۴۵
X - تقسیم جمل جبری	۴۶
قابلیت تقسیم کثیرالجمله از	۴۷
از ( $\pm$ )	۴۷
XI - اتحاد های مهم ۴۷ و ۴۸	۴۸
XII - ریشه و ریشگی	۴۹
ریشه اعداد جبری	۴۹
تحویل چند ریشگی بیک	۵۰
نمایش	۵۰
ضرب و تقسیم ریشگی	۵۰

موضوع	صفحه
گویا نمودن کسر اصم	۵۲
III - معادلات	۵۲
خواص معادلات	۵۲
حل و بحث معادلات درجه اول	۵۲
حل دستگاه دو معادله دو مجهولی درجه اول	۵۴
معادله درجه دوم	۵۵
روابط بین ضرائب و ریشه های معادله درجه دوم	۵۵
حاصل جمع قوای متشابه ریشه های معادله درجه	۵۶
علامت ریشه های معادله درجه دوم	۵۶
XIV - سه جمله درجه دوم	۵۸
مقایسه يك يا دو عدد یا ریشه های سه جمله درجه دوم	۵۹
مقایسه ریشه های دو سه جمله	۵۹ و ۶۰
XV - معادلات قابل تبدیل به معادله درجه دوم	۶۱
معادله دو مجهوری	۶۱
معادلات معکوسه	۶۱
حل معادلات معکوسه	۶۲

موضوع صفحه

معادلات معکوسه درجه ۲ و	۶۲
۴ و ۵	۶۴
معادلات اصم	۶۵
XVI - نامساوی	۶۵
خواص نامساوی	
نامساوی درجه اول يك	۶۵
مجهول	۶۶
نامساوی درجه دوم	۶۶
نامساوی درجه نام	۶۷
نامساوی کسری	۶۷
XVII - تصاعد حسابی	۶۹
XVIII - تصاعد هندسی	۷۰
IX - لگاریتم	۷۱
خواص لگاریتم	۷۴
چهار عمل اصلی در لگاریتم	۷۶
جدولهای لگاریتم	
ماقیس لگاریتم اعداد از ۱	۷۷
تا ۱۰۰۰	۷۸
X - ریج مرکب	۷۸
XI - قسط السین	۸۰
XII - نمایش هندسی	۸۱
مختصات دکارتی	۸۲
مختصات قطبی	
یستگی بین مختصات قطبی	

موضوع صفحه

و قائم	۸۲ و ۸۳
مختصات کروی	۸۳
تغییر محورهای مختصات	۸۴
دوران دورها	۸۴
طول قطعه خط	۸۵
تقسیم خط به نسبت K	۸۵
رابطه شال	۸۶
رابطه فیثاغورث	۸۶
« اول	۸۶
« استوارت	۸۷
XXXIII - متغیر و تابع	۸۷ و ۸۸
اقسام تابع	۸۸
XXXIV - حدود	۸۹
خواص حدود	۸۹
XXXV - رفع ابهام	۹۱
XXXVI - مشتقات	۹۲
محاسبه مشتق	۹۳
مشتق توابع متداول	۹۵
خواص مشتق	۹۵
رفع ابهام بوسیله مشتق	۹۶
XXXVII - تغییرات توابع	۹۶
تغییرات تابع درجه اول	۹۷
ماکزیمم و می نیمم	۹۸
تغییرات تابع درجه دوم	

موضوع	صفحه
تغییرات تابع دو معذوری ۹۹	
xxxvii - نمایش هندسی توابع ۱۰۱	
نمایش تغییرات تابع درجه اول	۱۰۱
ضریب زاویه ای	۱۰۲
زاویه دو خط	۱۰۲
معادله خط مارپریت یا دو نقطه	۱۰۲
فاصله نقطه از خط	۱۰۴
رسم خط	۱۰۴
فصل مشترک دو خط	۱۰۴
مجانیه ها	۱۰۴
قاعده برای پیدا کردن مجانیه ها	۱۰۵
تقعر و تحدب	۱۰۶
نقطه عطف	۱۰۶
مرکز و محور تقارن	۱۰۷
طری تعیین محور تقارن	۱۰۷
» » مرکز تقارن	۱۰۸
ماس بر منحنی	۱۰۹
ضریب زاویه ای ماس بر منحنی	۱۰۹
رسم ماس بر منحنی	۱۰۹
رسم منحنی	۱۱۰

موضوع	صفحه
xxix - حل معادلات یوسیده رسم منحنی	۱۱۴
xxx - حل نامعادلات یوسیده منحنی	۱۱۵
حل دستگاه نامعادلات	۱۱۶
xxxxi - تابع اولیه	۱۱۶
سطح منحصر	۱۱۸
متمم جبر	
xxxxii - معادله منحنی های منحصر	۱۱۹
معادله دایره	۱۱۹
» بیضی	۱۱۹
» هذلولی	۱۲۰
» معادله سهمی	۱۲۰
xxxxiii - حل معادلات دو جمله و سه جمله	۱۲۰
xxxxiv - قاعده یزو برای حل معادلات چند مجهولی درجه اول	۱۲۱
xxxxv - معادلات مجهول القوی و لگاریتمی	۱۲۳
xxxxvi - تجزیه رادیکالهای مرکب	۱۲۴
حل معادله درجه سوم	۱۲۵

موضوع صفحه

مثلثات

۱۲۹	I- کلیات
۱۲۹	اندازه قوس
۱۳۰	رابطه بین درجه و گراد و
۱۳۰	رادیان
۱۳۱	دائره مثلثاتی
۱۳۱	قضیه شال
۱۳۱	قوسهای متمم و مکمل
۱۳۲	II- خطوط مثلثاتی
۱۳۳	روابط بین خطوط مثلثاتی
۱۳۳	یک قوس
	روابط بین خطوط مثلثاتی
	قوسهایی که تفاضل یا مجموعشان
۱۳۴	مضرب $\pi$ باشند
	روابط بین قوسهای مقابل به
۱۳۵	یک خط مثلثاتی
	جدول خطوط مثلثاتی برخی
۱۳۶	قوسهای مهم
۱۳۶	دوره تناوب خطوط مثلثاتی
	جمع و تفریق و ضرب و
۱۳۶	تقسیم قوسها
۱۳۶	تصویر بر محور
	خطوط مثلثاتی مجموع یا

موضوع

صفحه

۱۳۷	تفاضل دو قوس
۱۳۷	خطوط مثلثاتی مجموع سه
۱۳۷	قوس
۱۳۷	خطوط مثلثاتی قوسهایی که
۱۳۷	مضرب یک قوس هستند
۱۳۷	خطوط مثلثاتی یک قوس
۱۳۸	بر حسب ظل نصف آن
	خطوط مثلثاتی یک قوس
۱۳۸	بر حسب جیب دو برابر آن
	محاسبه $1/2a$ بر حسب $1/2a$
۱۳۹	IV- لگاریتمی کردن
	تبدیل مجموع یا تفاضل دو
۱۴۰	خطوط مثلثاتی بحاصل ضرب
	تبدیل حاصل ضرب دو خط مثلثاتی
۱۴۰	بمجموع یا تفاضل
	تبدیل برخی عبارات مثلثاتی
۱۴۱	بحاصل ضرب
	حل معادله درجه دوم
۱۴۲	بطریق مثلثاتی
	V- روابط بین اجزاء
۱۴۲	مثلث
۱۴۲	مثلث قائم الزاویه
۱۴۳	مثلث غیر مشخص

موضوع	صفحه
روابط بین اجزاء اصلی و	
فرعی مثلث	۱۴۲
مساحت مثلث	۱۴۴
ارتفاعات «	۱۴۴
مصفف الزاویه ها	۱۴۵
میانیه ها	۱۴۵
روابط بین اجزاء مختلف	۱۴۶
VI - معادلات مثلثاتی	۱۴۶
معادلات يك مجهولی	۱۴۷
قاعده بیوش	۱۴۷
حل معادلات کلاسیک	۱۴۸
معادلات چند مجهولی	۱۵۱
VII - نامعادلات مثلثاتی	۱۵۲
VIII - حل مثلث	۱۵۴
تبادل دستگاهها	۱۵۵
حل مثلث قائم الزاویه	۱۵۶
حل مثلث غیر مشخص	۱۵۷
IX - چهاربرهای گوی	۱۵۸
روابط بین اجزاء چهاربر	
محاطی	۱۵۹
X - استعمال مثلثات در نقشه	
بررداری	۱۶۰
مسئله نقشه	۱۶۲

موضوع	صفحه
هندسه	
I - تعاریف	۱۶۴
II - زوایا و خطوط عمود	
برهم	۱۶۵
اندازه زاویه	۱۶۶
اقسام زوایا	۱۶۶
حالات برابری زوایا	۱۶۸
III - چند برها	۱۶۸
قضایای مربوطه به چند برها	۱۶۸
IV - مثلث	۱۶۹
قضایای مربوط به مثلث	۱۷۰
حالات برابری مثلثها	۱۷۱
تناسب و تشابه در مثلث	۱۷۴
قضیه طالس	۱۷۴
قضایای مربوط به تشابه مثلث	۱۷۴
خواص منصف الزاویه	۱۷۴
قضیه استوارت	۱۷۵
روابط بین اجزاء مختلف	۱۷۵
دایره های محیطی و محاطی	۱۷۷
موریات	۱۷۷
قضیه منلائوس	۱۷۹
قضیه سوا	۱۷۹
V - چهاربر	۱۷۹



صفحه	موضوع	صفحه	موضوع
۱۸۰	متوازی الاضلاع	۱۹۰	محور اصلی
۱۸۱	لوزی	۱۹۱	حل و بحث معادله درجه دوم
۱۸۱	مستطیل و مربع	۱۹۱	دوایر عمود بر هم
۱۸۱	ذوزنقه	۱۹۲	محیط و مساحت دایره
۱۸۲	چهار بر محیطی و مماسی	۱۹۲	محاسبه $\pi$
۱۸۲	قضیه پتالامیوس	۱۹۳	مساحت دایره و قطعه و قطاع
۱۸۳	چهار بر کامل	۱۹۳	VIII - بردارها
۱۸۳	قضیه گوس	۱۹۴	قضیه شال
۱۸۳	قضیه پاپوس		مجموع و تفاضل هندسی چند
۱۸۳	VI - چند برهای منتظم	۱۹۴	بردار
	طول ضلع و ارتفاع چند	۱۹۵	تصاویر بردارها
	چند بر منتظم	۱۹۵	IX - موربات
	مساحت چند بر منتظم	۱۹۵	قضیه باسکال
	مساحت چند بر نامنتظم	۱۹۶	قضایای منلائوس و سوا
	VII - دایره	۱۹۶	X - تقسیم توافقی
	اوضاع نسبی دودایره	۱۹۷	اشعه توافقی
	اندازه زاویه	۱۹۷	XI - تقارن
	قوس و وتر	۱۹۷	تقارن مرکزی
	رسم مماس بردایره	۱۹۸	تقارن محوری
	جدول تعداد مماسهای مشترک	۱۸۸	XII - تشابه
	دودایره	۱۸۸	XIII - تجانس
	قاعده رسم مماس مشترک		قضیه دالامیر
	داخلی و خارجی	۱۸۹	XIV - تغییر مکان در سطح
	قوت نقطه نسبت بدایره	۱۸۹	انتقال

موضوع	صفحه
دوران	۲۰۲
XV - خط و صفحه	۲۰۲
وضع دو خط	۲۰۴
وضع دو صفحه	۲۰۴
وضع سه صفحه	۲۰۵
قضیه شده عمود	۲۰۶
رسم عمود مشترک	۲۰۷
XVI - فرجه ها	۲۰۷
تصویر بر صفحه	۲۰۸
خط یزد گترین شیب	۲۰۹
XVII - تقارن در فضا	۲۰۹
XVIII - تجانس در فضا	۲۱۱
IX - تشابه در فضا	۲۱۲
XX - تغییر مکان در فضا	۲۱۲
انتقال	۲۱۴
دوران	۲۱۴
حرکت مارپیچی	۲۱۵
XXI - چندروها	۲۱۵
قضیه اولر	۲۱۷
اجسام افلاطونی	۲۱۷
منشور و هرم	۲۱۷
مکعب و مکعب مستطیل	۲۱۷
شبه منشور	۲۱۹

موضوع	صفحه
XXII - استوانه و مخروط	۲۱۹
و کره	۲۱۹
سطح دوار	۲۱۹
سطح استوانی	۲۲۰
سطح کروی	۲۲۱
استوانه و مخروط	۲۲۱
کره	۲۲۲
تعیین شعاع کره	۲۲۴
XXIII - سه بر کروی	۲۲۵
سه بر قطبی	۲۲۵
XXIV - قوت نقطه نسبت	۲۲۷
بکره	۲۲۷
XXV - قطب و قطبی در	۲۲۸
صفحه	۲۲۸
اشکال قطبی معکوس	۲۲۸
قطب و قطبی در فضا	۲۲۹
XXVI - انعکاس در صفحه	۲۲۹
انعکاس در فضا	۲۳۱
XXVII - مناظر و مرایا	۲۳۲
تصویر مرکزی	۲۳۲
XXVIII - مارپیچ	۲۳۴
مماس بر مارپیچ	۲۳۵
معادله مارپیچ	۲۳۶

## موضوعات

صفحه

۱ - بیضی	۲۳۶
رسم بیضی	۲۳۷
فصل مشترک خط و بیضی	۲۳۸
ماس بر بیضی	۲۳۹
شعاعهای حامل - معادله بیضی	۲۴۱
بیضی تصویر دایره است	۲۴۱
مساحت بیضی	۲۴۱
II - هندلوی	۲۴۲
رسم هندلوی	۲۴۲
فصل مشترک خط و هندلوی	۲۴۴
ماس بر هندلوی	۲۴۴
رسم ماس بر هندلوی	۲۴۴
مجاانبهای هندلوی	۲۴۵
شعاعهای حامل - معادله هندلوی	۲۴۵
III - سهمی (شلجی)	۲۴۶
رسم سهمی	۲۴۶
فصل مشترک خط و سهمی	۲۴۸
ماس بر سهمی	۲۴۸
رسم ماس بر سهمی	۲۴۹
شعاعهای حامل - معادله	

## موضوع

صفحه

مساحت سهمی	۲۵۰
۱۷ - خواص مشترک بیضی و هندلوی و سهمی	۲۵۱
رسم ماس	۲۵۲
مقاطع مخروطی	۲۵۲
هندسه رقی می و توهمی	۲۵۴
کلیات	۲۵۴
۱ - اصول هندسه رقی می	۲۵۵
I - نقطه	۲۵۵
مقیاس	۲۵۵
II - خط مستقیم	۲۵۶
شیب و اساس	۲۵۶
تسطیح - سطح قائم بر افق	۲۵۷
تعیین رقوم نقطه ای از خط	۲۵۷
تعیین زاویه خط با سطح	۲۵۸
مقایسه	۲۵۸
وضع دو خط	۲۵۹
III - صفحه	۲۵۹
خط بزرگترین شیب	۲۶۰
توازی خط و صفحه	۲۶۰
توازی دو صفحه	۲۶۰
تقاطع صفحات	۲۶۰
تقاطع خط و صفحه	۲۶۰
خط عمود بر صفحه	۲۶۰

صفحه	موضوع	صفحه	موضوع
۲۷۷	زاویه دو خط	۲۶۱	تسطیح
۲۷۷	زاویه خط و صفحه	۲۶۳	۲- اصول هندسه ترسیمی
۲۷۷	زاویه دو صفحه	۲۶۳	I- نقطه
۲۷۷	رسم خطی که با ادق زاویه α تشکیل دهد	۲۶۴	II- خط مستقیم
۲۷۷	رسم خطی در صفحه که با افق زاویه α تشکیل دهد	۲۶۴	خطوط مهم
۲۷۸	زاویه صفحه با صفحات تصویر	۲۶۵	نقاط مهم
۲۷۹	زاویه خط با صفحات تصویر	۲۶۵	توازی دو خط
۲۷۹	نمایش چند روها	۲۶۵	نقاط دو خط
۲۸۰	خطوط مرئی و مخفی	۲۶۵	III - صفحه
۲۸۱	مقطع اجسام	۲۶۵	خطوط مهم صفحه
۲۸۱	فصل مشترک خط و چند رو	۲۶۶	صفحات مهم
۲۸۲	سایه ها	۲۶۷	توازی خط و صفحه
	مکانیک	۲۶۷	خط عمود بر صفحه
۲۸۴	I بردارها و عزم	۲۶۷	فصل مشترک دو صفحه
۲۸۴	عزم مرکزی	۲۶۷	فصل مشترک خط و صفحه
۲۸۶	عزم محوری	۲۶۸	IV- تغییر مکان
۲۸۷	عزم بردار نسبت به صفحه	۲۶۸	I - تغییر صفحه
۲۸۸	علامه الحركات	۲۷۰	پ - دوران
۲۸۸	I - تعاریف	۲۷۲	پ - تسطیح
۲۸۹	II - حرکت مستقیم الخط	۲۷۵	۳ - موارد استعمال
	متشابه	۲۷۵	عمود مشترک دو خط
		۲۷۶	فاصله دو نقطه
		۲۷۶	فاصله نقطه از صفحه
		۲۷۶	فاصله نقطه از خط

موضوع	صفحه
حرکت در امتداد قائم	۲۰۱
حرکت سهمی شکل	۲۰۲
III - XVII - حرکت نقطه مادی	۲۰۳
غیر آزاد	۲۰۳
حرکت نقطه بر سطح	۲۰۳
مورب	۲۰۴
XXI - کار	۲۰۶
XX - قوه حیه	۲۰۶
XXI - استاتیك اجسام صلب	۲۰۷
XXII - اعمال مقدماتی	۲۰۸
XXIII - مرکز ثقل	۲۰۹
مختصات مرکز ثقل	۲۱۰
مرکز ثقل خطوط و	۲۱۱
سطوح و اجسام مختلف تا	۲۱۲
قضیه گولدن	۲۱۲
XVII - شرط تعادل اجسام صلب	۲۱۲
آزاد	۲۱۳
XV - شرط تعادل جسم صلب غیر	۲۱۳
آزاد	۲۱۴
کثیر الاضلاع اتکاء	۲۱۵
XVI - ماشینهای ساده	۲۱۵
اهرمها	۲۱۵
چرخ چاه	۲۱۶
کریك یا جك	۲۱۷

موضوع	صفحه
III - حرکت مستقیم الخط	۲۸۹
متغیر	۲۸۹
IV - حرکت متشابه تغییر	۲۹۰
V - حرکت نوسانی ساده	۲۹۱
VI - حرکت منحنی الخط متشابه	۲۹۱
هدگراف	۲۹۲
VII - حرکت مستدیر متغیر	۲۹۲
VIII - حرکت مستدیر متشابه	۲۹۳
IV - تغییر دستگاه قایمه	۲۹۳
X - حرکت انتقالی	۲۹۴
XI - دوران	۲۹۴
علم القوی	۲۹۴
XII - تعاریف	۲۹۵
XIII - تعادل نقطه مادی	۲۹۷
XIV - استاتیك نقطه آزاد	۲۹۷
رابطه استون	۲۹۸
XV - استاتیك نقطه غیر آزاد	۲۹۸
فشار و عکس العمل	۲۹۹
اصطكاك	۲۹۹
قوانین اصطكاك	۳۰۰
XVI - دیناميك نقطه	۳۰۰
دستورهای اصلی دیناميك	۳۰۰
XVII - حرکت نقطه مادی	۳۰۱
آزاد	۳۰۱

موضوع	صفحه	موضوع	صفحه
قرقره	۳۱۸	معادله زمان	۳۳۸
آحاد علمی مستعمل در		تقویم مصری	۳۳۹
ریاضیات		تقویم قیصری	۳۳۹
هیچکس		تقویم گرگوارى	۳۴۰
۱- کلیات	۳۲۰	تقویم جلایى	۳۴۰
۱۱- مختصات کروی	۳۲۲	تقویم قمری	۳۴۱
مختصات سمتیه	۳۲۲	VII - ماه	۳۴۱
ارتفاع قطب	۳۲۴	VIII - خسوف و کسوف	۳۴۲
مختصات معدلی	۳۲۴	خسوف	۳۴۲
تعیین فاصله قطبى	۳۲۴	کسوف	۳۴۵
مختصات منطقه‌ی	۳۲۵	IX - قوانین هیئت	۳۴۶
۱۱۱ - زمین	۳۲۵	قوانین کپلر	۳۴۶
۱۷ - نقشه‌های جغرافی	۳۲۸	قانون نیوتن	۳۴۶
V - خورشید	۳۲۴	X - سیارات	۳۴۷
تعیین نقاط اعتدال	۳۳۵	قانون بد	۳۴۷
VI - زمان و تقویم	۳۳۶	جدول مشخصات سیارات عمده	۳۴۸
فصول	۳۳۸	« ایما دو جرم »	۳۴۹

## مقدمه

رشته‌های مختلف علوم ، خاصه علوم ریاضی ، چنان  
پیچیده و بستگی دارند که در موارد بسیار فهم و درک مطلبی  
در يك رشته به مراجعه مطالب متنوع در رشته های دیگر  
محتاج میباشد .

از این روی طالب علم باید کتابهای متعدد در دسترس  
خود داشته باشند و گاه و بیگاه با آنها مراجعه کند .  
این کار برای کسانی که با تفنن و فراغ خاطر بمطالعه  
میرد از تند دشواری نیست ، اما برای جوانانی که در دوره های  
متوسطه و عالی بکسب دانش مشغولند جای آن نیست که  
مقدار زیادی از وقت گرانیهایشان که باید برای فرا گرفتن  
مواد درسی مصروف شود به تجسس در کتاب های مختلف  
عسر و جهد گردد .

ما ، برای اینکه خدمت و کمکی بدان دانش آموزان و

دانشجویان جوان کرده باشیم ، آنچه در رشته های مختلف ریاضیات مقدماتی باید آموخت یکجا گردآورده و در يك مجلد در دسترس آنان قرار میدهیم .

در این مجموعه نظری بیرنامه کنونی تحصیلات متوسطه نداشته و مطالب کتاب را بر طبق آن مرتب نکرده ایم ، بلکه آنچه در حساب ، جبر ، هندسه و مخروطات ، هندسه های رقومی و تریسیمی ، مثلثات ، مکانیک و هیئت باید آموخته شود بطور مختصر ، و شاید مفید ، جمع آوری نموده ایم . برای هیچيك از مطالب اقامه دلیل و برهان نکرده ایم چه در این صورت کتاب بسیار مفصل میشد و جا دادن مطالب در يك مجلد میسر نمیگردید .

این کتاب که با قطع كوچك تهیه شده بهترین رفیق شفیق جوان دانشجویست و مطالبی را که وی از کتابهای متعدد آموخته است یادآوری میکند و او را در اینک هر لحظه بکتابهای مختلف درسی مراجعه کند بی نیاز میسازد . همه جا همراه او ، همیشه در دسترس او و در هر لحظه طرف مراجعه او میتواند بود .



ما بسیار کوشیده‌ایم که کتاب حاضر را کامل و جامع تهیه و تدوین کرده باشیم ، ولی تردیدی نداریم که نقص‌های بسیار دارد و تکمیل آن محتاج بر راهنمایی و کمک همکاران عزیز و معلمان دانشمند می‌باشد .

این کار هر چند بظواهر خرد باشد ، شگرفتر از آن نیست که بتوانیم ادعا کنیم که آنرا چنانکه شایسته است انجام داده‌ایم چنین داعیه‌ای نداریم و از دیران فاضل خواستاریم که ما را بمعایب و نواقص کتاب واقف سازند تا در چاپهای بعد اثری مفید تر و جامع تر در دسترس اهل طلب قرار داده شود .

امیدواریم تا چاپهای دیگر کتاب ، چاپخانه های مسا بوسایل چاپ کتب ریاضی مجهزتر شوند تا نواقصی هم که از حیث حروف و علامات ریاضی ، یا احیاناً گاهی کارگرمتخصص پیدا شده است از میان برود .

بهشت ماه ۱۳۲۶

احمد میرشاک به احمد انواری

## حساب

### ۱- کلیات

- ۱- آنچه که قابل کم و زیاد شدن باشد کمیت است .
- ۲- قسمت محدودی از کمیت را مقدار گویند :
- ۳- واحد یا یک که هر کمیت مقدار مشخص و معینی از آن کمیت است که برای سنجیدن مقادیر همجتنس خود بکار میرود .
- ۴- عدد نتیجه سنجیدن هر مقدار با واحد همجتنس خودش میباشد .
- ۵- عدد درست ( صحیح ) عبارتست از اجتماع چند واحد تمام .
- ۶- سلسله اعداد طبیعی رشته اعدادیست که از یک شروع شود و در آن هر عدد یک واحد از عدد بلافاصله قبل از آن بزرگتر باشد . این سلسله بی انتهاست .
- ۷- پایه یا مبنای شمار معین میکنند که هر واحد مرتبه بالاتر چند برابر واحد مرتبه پائین تر است .
- ۸- پایه شمار معمولی ده میباشد و این شمار را شمار دهدهی (اعشاری) میگویند .
- ۹- در اعداد دهدهی (اعشاری) ده واحد از هر مرتبه واحد مرتبه بلافاصله بالاتر را تشکیل میدهد .
- ۱۰- در هر عدد رقمی که سمت چپ رقم دیگر نوشته شود نمایش مرتبه بلافاصله بالاتر خواهد بود .

## II - جمع

۱۱ - در جمع اعداد تغییر محل عوامل جمع تغییری در حاصل جمع نمیدهد.

۱۲ - بجای چند عامل جمع میتوان حاصل جمع آنها را قرار داد، یعنی:

۱۳ - برای امتحان جمع بیکدی از این طریقه ها عمل بیاید کرد:

الف - اگر در موقع جمع اعداد را از پائین بالا جمع کرده باشیم برای امتحان آنها را از بالا پائین جمع میکنیم.

ب - اعداد را دسته دسته نموده هر دسته را جداگانه جمع میکنیم و حاصل جمعها را با هم جمع مینمائیم.

## III - تفریق

۱۴ - هرگاه یک عدد بعوامل تفریق (مفروق و مفروق منه) یا کاسته و کاهشیاب (اضافه یا از آنها کم کنیم در تفاضل تغییری پیدا نمیشود. یعنی:

۵ - برای کاستن مجموع چند عدد از یک عدد (یا مجموع چند عدد) میتوان یکایک آنها را از این عدد (یا

مجموع چند عدد) کاست. یعنی:

۱۶ - امتحان تفریق را میتوان بیکدی از طریقه های

- زیر انجام داد :

الف - تفاضل را از گاهشیاپ کسر می‌کنیم، گاسته بدست می‌آید .  
 ب - تفاضل را با گاسته جمع می‌کنیم، گاهشیاپ بدست می‌آید .

### ۱۷- ضرب

۱۷- در ضرب دویا چند عدد تغییر محل عاملهای ضرب در حاصل ضرب اثری ندارد ، یعنی :  $a \times b \times c = b \times a \times c$   
 ۱۸- برای ضرب مجموعه یا تفاضل چند عدد در یک عدد آن عدد را در هر یک از عوامل جمع یا تفریق ضرب نموده حاصل ضربهای جزء را با هم جمع یا از هم تفریق می‌کنیم، یعنی :

$$(a + b + c) \times m = am + bm + cm$$

۱۹- بجای چند عامل میتوان حاصل ضرب آنها را

قرار داد، یعنی :  $abcdef = (fb) \times (da) \times (ec)$

۲۰- برای ضرب یک عدد در حاصل ضرب چند عدد

میتوان آنرا در یکی از عوامل ضرب نموده حاصل را در سایر

عوامل ضرب کرد ، یعنی :  $abcdef \times n = abc(dn)ef$

۲۱- برای ضرب حاصل ضرب چند عدد در حاصل

ضرب چند عدد دیگر میتوان تمام عوامل را در هم ضرب نمود،

یعنی :  $abcd \times pq = abcdpq$

۲۲- در ضرب دو عدد هرگاه یکی از دو عامل ضرب

را چند مرتبه بزرگ یا کوچک کنیم حاصل ضرب نیز همان اندازه بزرگ یا کوچک میشود.

۲۳ - هرگاه یکی از عاملهای ضرب را در عددی ضرب و عامل دیگر را بر همان عدد تقسیم کنیم در حاصل ضرب تغییری حاصل نمیشود.

۲۴ - برای امتحان ضرب جای مضروب (پس شمرده) و مضروب قیه (پس شمار) را با هم عوض میکنیم و عمل ضرب را تکرار میمائیم.

### ۱- تقسیم

۲۵ - در هر تقسیم اگر حاصل ضرب بهر (خارج قسمت) در بخشیا ب (مقسوم علیه) را با باقیمانده جمع کنیم بخش (مقسوم) بدست میآید. یعنی اگر  $(1) \div (2) = (3) \text{ باقیمانده } (4)$  بهر  $(2) \times (3) + (4) = (10)$  و باقیمانده باشد:

و همچنین  $(10) \div (2) = (5) \text{ باقیمانده } (0)$

۲۶ - اگر مقسوم و مقسوم علیه (بخشی و بخشیا ب) را بر عددی تقسیم (یا در عددی ضرب) کنیم خارج قسمت تغییری نمیکند ولی باقیمانده بر آن عدد تقسیم (یا در آن عدد ضرب) میشود.

۲۷ - برای تقسیم یات عدد بر حاصل ضرب چند عدد میتوان آنرا بر یکی از عوامل ضرب تقسیم نموده خارج قسمت را بر عامل دوم و خارج قسمت جدید را بر عامل سوم تقسیم کنیم و عمل را ادامه دهیم تا آخرین خارج قسمت

بدست آید .

۲۸ - برای امتحان تقسیم میتوان خارج قسمت را در مقسوم علیه ضرب نموده حاصل را با باقیمانده جمع کرد ، در صورت صحت مقسوم بدست میآید . یا باقیمانده را از مقسوم کم نمود، در صورت صحت تفاضل بر مقسوم علیه قابل قسمت می باشد .

## ۷۱- قوای اعداد (توان)

۲۹ - قوه  $a^{nn}$  هر عدد عبارتست از حاصل ضرب  $nn$

$nn$  مرتبه

مرتبه آن عدد

$$a^{nn} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{nn \text{ مرتبه}}$$

$a$  را باید و  $nn$  را نما گویند.

۳۰ - قوه اول هر عدد مساوی خود آن عدد است

$$a^1 = a$$

یعنی :

۳۱ - هر عدد بقوه صفر مساوی است با یک، یعنی :

$$a^0 = 1$$

۳۲ - حاصل ضرب دو قوه با پایه مشترک مساویست با

همان پایه بقوه مجموع نماها، یعنی

$$a^m \times a^n = a^{(m+n)}$$

۳۳ - حاصل ضرب دو قوه با نماهای مشترک مساویست

با حاصل ضرب پایهها بقوه همان نمای مشترک، یعنی :

$$a^m \times 1^n = (a^n)^m$$

۳۴- توان  $m$  ام حاصل ضرب چند عدد مساوی است با حاصل ضرب توانهای  $m$  ام آن اعداد . یعنی :

$$m \cdot m \cdot m \cdot \dots \cdot m = m^m \quad (n \text{ بار})$$

۳۵- اگر توان  $m$  ام عددی را بخواهیم به توان جدیدی برسانیم باید پایه را به توان حاصل ضرب نمایها رساند یعنی :

$$m \cdot n = m^{n \cdot m} \quad (n \text{ بار})$$

۳۶- خارج قسمت دو قوه مختلف یک عدد مساویست با همان پایه که به توان تفاضل دو نما برسد، یعنی :

$$m - n = m^{m-n} \quad (n \text{ بار})$$

۳۷- باقیمانده تقسیم قوه  $m$  ام هر عدد  $a$  بر عدد دیگر  $b$  مساویست با باقیمانده قوه  $m$  ام باقیمانده تقسیم  $a$  بر  $b$  .

## ۷/۱۱- مساوی و نا مساوی

۳۸- اگر دو طرف دو یا چند تساوی را با یکدیگر جمع یا از یکدیگر تفریق ، در یکدیگر ضرب یا بر یکدیگر تقسیم کنیم نتیجه یک تساوی خواهد بود :

$$\begin{aligned} a &= b & a &= b \\ a + c &= b + c & a - c &= b - c \\ a \cdot c &= b \cdot c & \frac{a}{c} &= \frac{b}{c} \end{aligned}$$

۳۹ - اگر بین دو طرف دو یا چند نامساوی یکجبهت اعمال جمع ، تفریق ، ضرب یا تقسیم بجا آوریم نتیجه همواره يك نامساوی در همان جهت خواهد بود :

$$\begin{array}{l} a > b \quad c > d \quad \Rightarrow \quad a + c > b + d \\ a < b \quad c < d \quad \Rightarrow \quad a + c < b + d \end{array}$$

توجه - در صورتیکه اعمال چهارگانه بین چند مساوی و چند نامساوی یکجبهت بعمل آید نتیجه يك نامساوی در همان جهت خواهد بود .

### VIII - بخش پذیری یا قابلیت تقسیم

۴۰ - عددی بر عدد دیگر قابل قسمت است که باقیمانده تقسیمش بر آن صفر باشد. عدد اول را مضرب دومی و دومی را مقسوم علیه یا عاد اولی مینامند و میگویند دومی اولی را عاد میکند .

۴۱ - هر عدد که رقم سمت راست آن صفر یا جفت باشد بر ۲ قابل قسمت است .

۴۲ - هر عدد که دو رقم سمت راست آن صفر باشند یا عددی تشکیل دهند که مضرب ۴ باشد بر ۴ قابل قسمت است .

۴۳ - عددی بر ۸ قابل قسمت است که سه رقم سمت راست آن صفر بوده یا عددی تشکیل دهند که مضرب ۸ باشد .

۴۴ - عددی بر ۳ قابل قسمت است که مجموع ارقامش بر ۳ قابل قسمت باشد . اگر تقسیم مجموع ارقام يك عدد بر



حساب

صفحه ۸

۳ باقیمانده داشته باشد باقیمانده تقسیم آن عدد هم بر ۳ همان خواهد بود .

۴۵ - عددی بر ۵ قابل قسمت است که رقم سمت راست آن صفر یا ۵ باشد .  
۴۶ - عددی بر ۶ قابل قسمت است که بر ۲ و ۳ قابل قسمت باشد .

۴۷ - عددی بر ۹ قابل قسمت است که مجموع ارقامش بر ۹ قابل قسمت باشد . اگر تقسیم مجموع ارقام عددی بر ۹ باقیمانده داشته باشد باقیمانده تقسیم عدد هم بر ۹ همانست خواهد بود .

۴۸ - عددی بر ۱۱ قابل قسمت است که تفاضل مجموع ارقام مراتب زوج و مجموع ارقام مراتب فردش صفر و یا قابل قسمت بر ۱۱ باشد . و الا باقیمانده تقسیم همان تفاضل یا زیادتى ۱۱ بر آن تفاضل خواهد بود .  
مثال : ۱ )  $۷۹۸۸۴۲$  بر ۱۱ قابل قسمت است .

۲ )  $۴۷۵۸$  بر ۱۱ قابل قسمت نیست و باقیمانده تقسیم و تفاضل ارقام مراتب زوج و فرد ۶ میباشد .  
۳ ) عدد  $۳۵۴۷۵۸۰$  بر ۱۱ قابل قسمت نیست و تفاضل مجموع ارقام مراتب زوج و فرد ۳ و باقیمانده تقسیم ۸ یا  $(۳-۱۱)$  است

## ۱.۲ - اعداد اول

۴۹ - هر عددی که جز بر خود و یک به عدد دیگری قابل قسمت نباشد عدد اول نامیده میشود .  
۵۰ - اعداد اول از ۱ تا ۱۰۰۰ عبارتند از :

اعداد اول										صفحه ۹
۱	۲	۳	۵	۷	۱۱	۱۳	۱۷	۱۹	۲۳	۲۹
۳۱	۳۷	۴۱	۴۳	۴۷	۵۹	۶۱	۶۷	۷۱	۷۳	۷۹
۸۳	۸۷	۸۹	۹۷	۱۰۱	۱۰۳	۱۰۷	۱۰۹	۱۱۳	۱۱۷	۱۲۱
۱۳۱	۱۳۷	۱۳۹	۱۴۳	۱۴۷	۱۵۱	۱۵۳	۱۵۷	۱۶۱	۱۶۷	۱۶۹
۱۷۱	۱۷۳	۱۷۷	۱۸۱	۱۸۳	۱۸۷	۱۹۱	۱۹۳	۱۹۷	۲۰۱	۲۰۳
۲۰۷	۲۱۱	۲۱۳	۲۱۷	۲۲۱	۲۲۳	۲۲۷	۲۳۱	۲۳۳	۲۳۷	۲۴۱
۲۴۳	۲۴۷	۲۵۱	۲۵۳	۲۵۷	۲۶۱	۲۶۳	۲۶۷	۲۷۱	۲۷۳	۲۷۷
۲۸۱	۲۸۳	۲۸۷	۲۹۱	۲۹۳	۲۹۷	۳۰۱	۳۰۳	۳۰۷	۳۱۱	۳۱۳
۳۱۷	۳۲۱	۳۲۳	۳۲۷	۳۳۱	۳۳۳	۳۳۷	۳۴۱	۳۴۳	۳۴۷	۳۵۱
۳۵۳	۳۵۷	۳۶۱	۳۶۳	۳۶۷	۳۷۱	۳۷۳	۳۷۷	۳۸۱	۳۸۳	۳۸۷
۳۹۱	۳۹۳	۳۹۷	۴۰۱	۴۰۳	۴۰۷	۴۱۱	۴۱۳	۴۱۷	۴۲۱	۴۲۳
۴۲۷	۴۳۱	۴۳۳	۴۳۷	۴۴۱	۴۴۳	۴۴۷	۴۵۱	۴۵۳	۴۵۷	۴۶۱
۴۶۳	۴۶۷	۴۷۱	۴۷۳	۴۷۷	۴۸۱	۴۸۳	۴۸۷	۴۹۱	۴۹۳	۴۹۷
۵۰۱	۵۰۳	۵۰۷	۵۱۱	۵۱۳	۵۱۷	۵۲۱	۵۲۳	۵۲۷	۵۳۱	۵۳۳
۵۳۷	۵۴۱	۵۴۳	۵۴۷	۵۵۱	۵۵۳	۵۵۷	۵۶۱	۵۶۳	۵۶۷	۵۷۱
۵۷۳	۵۷۷	۵۸۱	۵۸۳	۵۸۷	۵۹۱	۵۹۳	۵۹۷	۶۰۱	۶۰۳	۶۰۷
۶۰۷	۶۱۱	۶۱۳	۶۱۷	۶۲۱	۶۲۳	۶۲۷	۶۳۱	۶۳۳	۶۳۷	۶۴۱
۶۴۳	۶۴۷	۶۵۱	۶۵۳	۶۵۷	۶۶۱	۶۶۳	۶۶۷	۶۷۱	۶۷۳	۶۷۷
۶۸۱	۶۸۳	۶۸۷	۶۹۱	۶۹۳	۶۹۷	۷۰۱	۷۰۳	۷۰۷	۷۱۱	۷۱۳
۷۱۷	۷۲۱	۷۲۳	۷۲۷	۷۳۱	۷۳۳	۷۳۷	۷۴۱	۷۴۳	۷۴۷	۷۵۱
۷۵۳	۷۵۷	۷۶۱	۷۶۳	۷۶۷	۷۷۱	۷۷۳	۷۷۷	۷۸۱	۷۸۳	۷۸۷
۷۹۱	۷۹۳	۷۹۷	۸۰۱	۸۰۳	۸۰۷	۸۱۱	۸۱۳	۸۱۷	۸۲۱	۸۲۳
۸۲۷	۸۳۱	۸۳۳	۸۳۷	۸۴۱	۸۴۳	۸۴۷	۸۵۱	۸۵۳	۸۵۷	۸۶۱
۸۶۳	۸۶۷	۸۷۱	۸۷۳	۸۷۷	۸۸۱	۸۸۳	۸۸۷	۸۹۱	۸۹۳	۸۹۷
۹۰۱	۹۰۳	۹۰۷	۹۱۱	۹۱۳	۹۱۷	۹۲۱	۹۲۳	۹۲۷	۹۳۱	۹۳۳
۹۳۷	۹۴۱	۹۴۳	۹۴۷	۹۵۱	۹۵۳	۹۵۷	۹۶۱	۹۶۳	۹۶۷	۹۷۱

جدول اعداد اول معروفست بخریال اراتستن

- ۵۱ - تجزیه يك عدد بعوامل اول تشكيل دهنده آن عدد فقط بياك طريق ممكن است .
- ۵۲ - دو عدد را نسبت بهم اول گویند وقتی عادمشترك نداشته باشند، یعنی عددی نتوان یافت كه هر دو بر آن قابل-قسمت باشند .

- ۵۳- هر دو عدد غیر اول اقلا يك عاد اول خواهند داشت .
- ۵۴- رشته اعداد اول بی پایان است .
- ۵۵- هر عدد اولی که عدد دیگر را عاد نکند نسبت بآن اول است .
- ۵۶- هر عدد غیر اول حاصلضرب چند عدد اول است . بدست آوردن عوامل اول هر عدد غیر اول را تجزیه آن بعوامل اول گویند .

## ۵۷- بزرگترین عاد (یا مقسوم علیه) مشترک

- علامت اختصاری آن بعم میباشد .
- ۵۷- دو یا چند عدد میتوانند عاد های مشترک بسیار داشته باشند ؛ آنرا که از همه بزرگتر باشد بعم آنها میگویند .
- ۵۸- اگر بین دو عدد ، عدد کوچکتر بزرگتر را عاد کند خود آن بعم دو عدد مفروض خواهد بود .
- ۵۹- بعم دو عدد بعم عدد کوچکتر و باقیمانده تقسیم عدد بزرگتر بر کوچکتر نیز میباشد .
- ۶۰- برای تعیین بعم دو عدد بزرگتر را بر کوچکتر تقسیم میکنیم و عدد کوچکتر را بر باقیمانده تقسیم اول و باقیمانده تقسیم اول را بر باقیمانده تقسیم دوم قسمت میکنیم و عمل را به همین وجه ادامه میدهیم تا وقتی که عمل تقسیم باقیمانده نداشته باشد . آخرین مقسوم علیه بعم دو عدد مفروض است .

۸	۷	۵	
۶	۴۸	۳۴۲	۱۷۵۸
		۶	۴۸

۶۱ - برای تعیین بعم چند عدد نخست بین دوتای آنها بعم معین میکنیم ، سپس بین این بعم و عدد سوم بعم بدست میآوریم ، آنگاه بین بعم جدید و عدد چهارم . . . و به همین نحو عمل را ادامه میدهیم تا همه اعداد منظور شوند . آخرین بعم بعم کلیه اعداد است .

۶۲ - ممکنست بعم چند عدد را از راه تجزیه آنها بعوامل اول بدست آورد . برای اینکار پس از تجزیه آن اعداد عوامل اول مشترك آنها با کوچکترین نما را در هم ضرب میکنیم .

$$\begin{array}{l} ۱۷۵۸ = ۲ \times ۳ \times ۲۹۳ \\ ۳۴۲ = ۲ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \\ ۲۹۳ = ۲۹۳ \end{array}$$

۶۳ - اگر دو عدد در عددی ضرب ( یا بر عددی تقسیم ) شوند بعم آنها نیز چنین خواهد شد .

۱ - کوچکترین مضرب مشترك

علامتها اختصاری آن کم

۶۴- دو یا چند عدد مضربهای مشترک بیشمار دارند. آنرا که از همه کوچکتر باشد کمم آنها میگویند.

۶۵- کمم چند عدد که نسبت بهم اول باشند حاصل مضرب آنهاست.

۶۶- اگر دو عدد در عددی ضرب (یا بر عددی تقسیم) شوند کمم آنها نیز چنین خواهد شد.

۶۷- کمم بین دو عدد عبارتست از خارج قسمت تقسیم حاصل ضرب آن دو عدد بر بهم آنها.

۶۸- کمم بین چند عدد یا به طریق بدست میآید که اول بین دوتای آنها کمم تعیین نموده و بعد بین این کمم و عدد سوم کمم تعیین میکنیم و بهمین طریق عمل را ادامه میدهیم تا کمم بین تمام آن اعداد بدست آید.

۶۹- کوچکترین مضرب مشترک اعدادی که عوامل اول تجزیه شده اند عبارتست از حاصل ضرب عوامل اول مشترک و غیره مشترک آنها که دارای بزرگترین نما باشند.

## ۱۱- برخه یا کسر

۷۰- هر گاه یک (واحد) را به ۱۱ قسمت مساوی کنیم و ۱۱ قسمت از آنرا اختیار نمائیم برخه‌ای یا کسری از واحد مساوی  $\frac{11}{11}$  آن را اختیار کرده ایم.

۷۱- برخه نام یا مخارج و ۱۱ را بر خه شمار یا سووت گویند. هر گاه ۱۱ قوهای از ۱۰ باشد برخه را دهدهی یا

اعشاری و گرنه آنرا متعارفی میگویند .

اگر  $m$  از  $n$  بزرگتر باشد  $\frac{m}{n}$  را برخه نامیند .

چنانچه یا برخه عدد صحیحی همراه باشد یا یک عدد برخگی خواهیم داشت ، مانند  $\frac{2}{5}$

•  $m$  و  $n$  ممکنست عدد صحیح یا کسر باشند .

۷۱ - نسبت دو طول - هرگاه برای اندازه گرفتن دو طول  $l$  و  $l'$  واحد مشترکی بکار رود و  $l$  شامل  $m$  مرتبه و  $l'$  شامل  $n$  مرتبه واحد مشترک باشد نسبت دو طول او  $l$  عبارتست از برخه  $\frac{m}{n}$  .

خواص عمومی

۷۲ - حاصل ضرب طولی مانند  $l$  در عدد  $n$  عبارتست از حاصل جمع  $n$  طول مساوی  $l$  .

۷۳ - حاصل ضرب طولی مانند  $l$  در  $\frac{1}{n}$  یعنی عکس  $n$  عبارتست از طول حاصل از تقسیم  $l$  به  $n$  قسمت مساوی .

۷۴ - حاصل ضرب طولی مانند  $l$  در کسر  $\frac{m}{n}$  عبارتست

از  $\frac{m}{n}$  طول  $l$  ، یعنی برای بدست آوردن این حاصل ضرب باید  $l$  را در  $m$  ضرب و حاصل را بر  $n$  تقسیم نمود یا  $l$  را بر  $n$  تقسیم و خارج قسمت را در  $m$  ضرب کرد .

۷۵ - هرگاه دو جمله کسری (صورت و مخرج) را در

یا با عدد (یا بریات عدد) ضرب (یا تقسیم) کنیم حاصل کسری است مساوی کسر مفروض .

۷۶ - هرگاه صورت کسری را در عددی ضرب نمائیم

کسر در آن عدد ضرب میشود .

۷۷ - هرگاه مخارج کسری را در عددی ضرب نمائیم

کسر بر آن عدد تقسیم میشود .

۷۸ - هرگاه صورت کسری را بر عددی تقسیم نمائیم

کسر بر آن عدد تقسیم میشود .

۷۹ - هرگاه مخارج کسری را بر عددی تقسیم نمائیم

کسر در آن عدد ضرب میشود .

۸۰ - برای اینکه دو کسر  $\frac{a}{b}$  و  $\frac{c}{d}$  برابر باشند

لازم و کافیهست که  $ad = bc$  باشد .

۸۱ - کسری را میگویند **بسادۀ ترین صورت** درآمده

یا **خیر ممکن التحدویل** شده است که صورت و مخارجش عاد مشترکی نداشته باشند یعنی نسبت بهم اول باشند .

۸۲ - چند کسر را میگویند **مخارج مشترک** دارند که

مخرجهای همه یکی باشد .

۸۳ - برای تعدویل چند کسر **بکوچکترین مخارج مشترک** باید:

۱ - هر کسر را بساده ترین صورت درآورد ،

۲ - سپس بین مخارجها **کم** تعیین کرد ،

۳ - **کم** را بر مخارج هر کسر تقسیم و خارج قسمت را

در دو حاصل کسر ضرب نمود .

**تیمسره ۵ -** هر گاه در قسمت ۲ بجای کم مخرجها يك مضرب مشترك آنها را بدست آوریم کسرها يك مخرج تحويل خواهند شد نه بکوچکترین مخرج مشترك .

### جمع و تفریق برخه ها

**۸۴ -** مجموع یا تفاضل چند کسر که يك برخه نام (مخرج) داشته باشند کسریست که صورتش مجموع یا تفاضل صورتها و مخرجش مخرج مشترك کسرهاى مقروض باشند .

**تیمسره ۵ -** اگر کسرها يك مخرج نداشته باشند نخست آنها را يك مخرج تحويل میکنیم .

### ضرب برخه ها

**۸۵ -** حاصلضرب دو یا چند کسر کسریست که صورتش حاصلضرب صورتها و مخرجش حاصلضرب مخرجها باشد .

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \quad \frac{a}{a} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{a \cdot b}$$

### تقسیم کسرها

**۸۶ -** برای تقسیم دو کسر بر یکدیگر کسر مقسوم علیه را معکوس نموده بین آنها عمل ضرب بجا میآوریم :

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad \frac{a}{a} : \frac{c}{b} = \frac{a}{a} \cdot \frac{b}{c} = \frac{b}{c}$$

**۸۷ -** هر عدد صحیح را میتوان کسری دانست که مخرجش ۱ باشد . با این فرض قواعد را جم بسا اعمال حاصلی در کسرها را میتوان در اعداد صحیح نیز جاری دانست .



## برخه‌های دهمی

۸۸ - مجموع و تفاضل عددهای دهمی ممکنست عدد صحیح یا دهمی باشد .

۸۹ - حاصلضرب دو عدد دهمی همیشه عددیست دهمی

۹۰ - خارج تقسیم دو عدد دهمی ممکنست عددی صحیح یا کسر دهمی یا کسر متعارفی باشد .

## تبدیل کسر دهمی به متعارفی و بعکس

۹۱ - هر کسر دهمی را میتوان بصورت کسر متعارفی

$$\text{نوشت : } \frac{23}{1000} = \frac{230}{10000} = \frac{23}{100000} \dots$$

۹۲ - هر کسر متعارفی را میتوان بوسیله تقسیم کردن صورت بر مخرج بصورت کسر دهمی درآورد :

$$\frac{23}{25} = 0.92$$

کسر متعارفی را مولد کسر دهمی میکنند

۹۳ - اگر مخرج کسر متعارفی فقط مضرب قوای مختلف

۲ و ۵ باشد تقسیم صورت بر مخرج بطور صحیح انجام میگيرد یعنی بالاخره باقیمانده تقسیم صفر میشود . اما اگر مخرج شامل عواملی غیر از ۲ و ۵ باشد باقیمانده تقسیم ، هر قدر هم عمل را ادامه دهیم ، هیچگاه صفر نمیشود و چون بعد از يك یا چند عمل باقیمانده ای برابر یکی از باقیمانده‌های سابق بدست خواهد آمد يك عده ارقام مرتباً در خارج قسمت تکرار خواهند شد . چنین برخه‌ای را برخه دوری یا کسر متناوب گویند .

مثال ۱ : ..... ۰/۶۶۶ ۲

۲ ..... ۷۱۴۲۸۵ ۰/۷۱۴۲۸۵ ۵

در برخه دوری پیکرهائی را که تکرار میشوند دوره گردش نامند در مثال ۱ دوره گردش ۶ و در مثال ۲ ۷۱۴۲۸۵ است .

۹۴ - برخه دوری را ساده گویند اگر دوره گردش بی فاصله بعد از ممیز شروع شود (مثالهای بالا) و مرکب خوانند اگر بین ممیز و دوره گردش یک دوره غیر گردش یعنی عددی باشد که تکرار نشود .

مثال ..... ۵۷۱۴۲۸ ۰/۳۵۷۱۴۲۸ ۱۴

۹۵ - برای نوشتن بعد از ممیز دوره غیر گردش و بعد دوره گردش را یک بار نوشته پس از آن چند نقطه میگذاریم  
۹۶ - برخه متعارفی وقتی برخه دوری ساده قابل تبدیل است که در مخرجش هیچ عامل ۲ و ۵ نباشد و وقتی که در مخرجش عامل ۲ یا ۵ و عوامل دیگر باشند برخه دوری مرکب تبدیل میگردد .

۹۷ - کسر مولد کسراعدادی دوره ساده کسری است که صورتش یک دوره گردش و مخرجش بعد دوره گردش ۹ باشد .

۹۸ - صورت کسر مولد کسراعدادی متناوب مرکب بدین طریق بدست میآید که دوره غیر گردش را نوشته و دنبال آن یک دوره گردش را بنویسیم بعد از این عدد که حاصل میشود عدد حاصل از دوره غیر گردش را کم کنیم این

تفاضل صورت کسر مولد است مخرج کسر مولد کسرا عشری متناوب مرکب بدینطریق بدست میآید که بعداً دوره گردش ۹ نوشته و بعداً دوره غیر گردش صفر در جلوی آن بگذاریم

### XIII نسبت و تناسب :

۹۹ - نسبت دو عدد  $a$  و  $b$  عبارتست از خارج قسمت  $\frac{a}{b}$

اعداد  $a$  و  $b$  میتوانند صحیح یا کسری باشند .  
۱۰۰ - تساوی دو نسبت را يك تناسب گویند مانند

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

تناسب مذکور را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$a \cdot d = c \cdot b$$

۱ -

$$2 - \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \text{ و } \frac{c}{a} = \frac{d}{b} \text{ و } \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ و } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad \frac{a}{d} = \frac{b}{c} \quad \frac{c}{a} = \frac{d}{b} \quad \frac{d}{c} = \frac{a}{b}$$

$$3 - \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \quad \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$$

۴ -

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \Rightarrow \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$$

۱۰۱ - از چند نسبت مساوی ....

روابط زیر نیز نتیجه میشود :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{\pm a \pm b \pm c \pm d}{\pm a' \pm b' \pm c' \pm d'}$$

۱۰۲ - اگر چند نسبت نامساوی  $\frac{a}{a'}$  و  $\frac{c}{c'}$  و  $\frac{d}{d'}$  و  $\frac{b}{b'}$  در دست

باشند نسبت  $\frac{a+b+c+d}{a'+b'+c'+d'}$  محصور است بین بزرگترین و کوچکترین کسور مفروض.

۱۰۳ - اگر بصورت و مخارج کسر کوچکتر از واحد

$\frac{a}{b}$  يك عدد  $c$  بیفزائیم کسر بزرگتر میشود ولی باز از ۱

کوچکتر است یعنی هرگاه  $\frac{a}{b} < 1$  باشد  $\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}$

۱۰۴ - ولی هرگاه  $\frac{a}{b} > 1$

$$\frac{a+c}{b+c} < \frac{a}{b}$$

۱۰۵ - واسطه عددی  $A$  بین دو عدد  $a$  و  $b$  عبارتست از:

$$A = \frac{a+b}{2}$$

همچنین واسطه عددی  $A$  بین  $n$  عدد  $a$  و  $b$  و  $c$  و ... و ۱

$$A = \frac{a+b+c+\dots+1}{n}$$



اجزاء : دسیمتر مربع  $\approx ۰/۰۱$  ، سانتیمتر مربع  $\approx ۰/۰۰۰۱$  ، کیلومتر مربع  $\approx ۰/۰۰۰۰۰۰۱$  متر مربع  
 واحد اراضی زراعتی : آر  $\approx$  دکامتر مربع  
 اضلاع : هکتار  $\approx ۱۰۰$  آر  $\approx$  هکتومتر مربع  
 اجزاء : سانتی آر  $\approx ۰/۰۱$  آر  $\approx$  متر مربع  
 تبصره : در مقیاس سطح اضلاع و اجزاء صد صد بزرگ و کوچک میشوند .

۹۹۹ = حجم

واحد : متر مکعب

اضلاع : متداول نیستند

اجزاء : دسیمتر مکعب  $\approx ۰/۰۰۱$  ، سانتیمتر مکعب

$\approx ۰/۰۰۰۰۰۰۰۱$  ، میلیمتر مکعب  $\approx ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱$  متر مکعب .

تبصره : در مقیاس حجم اضلاع و اجزاء هزاره‌ها بزرگ و کوچک میشوند .

۹۹۹ = پوها

واحد : لیتر  $\approx$  یک دسیمتر مکعب

اضلاع : دکالیترا  $\approx ۱۰$  ، هکتولیترا  $\approx ۱۰۰$  ، کیلو

لیتر  $\approx ۱۰۰۰$  لیتر

اجزاء : دسیلیتر  $\approx ۰/۱$  ، سانتیلیتر  $\approx ۰/۰۱$  ، میلیلیتر

$\approx ۰/۰۰۱$  لیتر

۹۹۹ = وزن

واحد : گرم  $\approx$  وزن یک سانتیمتر مکعب آب مقطع درجه حرارت

اضعاف : دكا گرم ۱۰۰ ، هكتو گرم ۱۰۰۰ ، كيلو گرم ۱۰۰۰۰  
 كنتال ۱۰۰ كيلو گرم ، تن ۱۰۰۰ كيلو گرم  
 اچواء : دسی گرم : ۰/۱ سانتیگراد ۰/۱ سانتیگراد ۰/۱ سانتیگراد  
 برای جوا هرات : قیراط ۲۰ سانتیگراد

معدنگی و وزن و حجم

۱ گرم معادلست با وزن يك سانتیمتر مكعب آب مقطر درجه  
 ۱ كيلو گرم » » يك دسیمتر »  
 ۱ تن » » يك متر »  
 گرم و سانتیمتر مكعب ، كيلو گرم و دسیمتر مكعب ،  
 تن و متر مكعب را یكتهای متناظر گویند

۱۱۵ - وزن مخصوص يك جسم عبارتست از وزن  
 يکة حجم در صورتیکه وزن با يکة متناظر آن بیان شود .

وزن مخصوص بر روی اجسام مهم :

۱	چوب پنبه	۰/۲۴	۸	آلومینیوم	۲/۶
۲	چوب	۰/۶۶ - ۰/۴۳	۹	آنتیموان	۶/۸
۳	بنزین	۰/۶۹ - ۰/۷۱	۱۰	روی	۷/۲
۴	نقطه	۰/۷۶	۱۱	چدن	۷/۱ - ۷/۳
۵	الکل	۰/۸۱	۱۲	قلم	۷/۲
۶	یخ	۰/۸۸ - ۰/۹۲	۱۳	آهن	۷/۸۵
۷	آب	۱/۰	۱۴	فولاد نرم	۷/۸۶

صفحه ۲۳

۸/۷-۸/۴  
۸/۸۵  
۸/۹  
۱۰/۵  
۱۱/۲  
۱۳/۶  
۱۹/۳۲  
۲۱/۲

مفرغ  
نیکل  
مس  
نقره  
سرب  
جیوه  
طلا  
پلاتین

۴۵  
۴۶  
۴۷  
۴۸  
۴۹  
۴۰  
۴۱  
۴۲

مقیاسها

۱۵ مازوت  
۱۶ اسفالت  
۱۷ ذغال سنک  
۱۸ کک  
۱۹ آجر  
۲۰ خاک رس  
۲۱ بتن  
۲۲ سیمان  
۲۳ شیشه  
۲۴ سنک

۱/۱-۰/۹  
۱/۵-۱/۱  
۱/۵-۱/۲  
۱/۴  
۱/۶-۱/۴  
۲/۱-۱/۶  
۱/۵-۱/۸  
۱/۹  
۲/۶-۲/۴  
۳/۰-۲/۵

۱۹۹۸ = ۱۹۹۹

شماره ترتیب	مشخصات	عبار	وزن گرم	خالص
۱	طلا		۸	۷۰۴۴۲۴۸۴
۲	پلاتین		۴۰۰۶۶۵۵	۴۰۰۶۶۱۱۵۱
۳	نقره		۱۶۰	۵۰۶۰
۴	سرب		۸۰	۴۰۸۰
۵	جیوه		۴۰۴۰	۱۰۵۴
۶	مس		۱۰۶۰	۱۰۵۶
۷	نیکل		۴۰۴۵	—
۸	مفرغ		۴۰۶۸	—
۹	پلاتین		۱۰۶۵	—
۱۰	مس		۴۰۴۵	—



## ۱۱۷۲ مقیاسهای سابق

طول : واحد : ذرع

اضعاف : فرسناك ۶۰۰۰ ذرع

اجزاء : چارك ۱۰ ذرع ، كره ۱۰ ذرع ، بهير ۱۰ ذرع

۱۰ ذرع

وزن : واحد : من

اضعاف : ری ۴ من ، خروار ۱۰۰ من

اجزاء : چارك ۱۰ من ، سیر ۱۰ من

مثقال ۱۰ سیر : نخود ۱۰ مثقال : گندم ۱۰ نخود

۱۱۸۵ - و لا یطهرون مقیاسهای فعلی و قدیم

ذرع ۱/۰۴ متر

گندم	نخود	مثقال	سیر	من	خروار
گرم ۰/۴۸	۵		۱		
۷۵ گرم			۱۰		
۷۵۰ گرم			۱۰		
يك كيلو گرم	۸	۵	۱۰		
»				۱	
سیریکه				۱۰	
يك تن	۸	۵	۱۰	۱۰	۱۰

صفحه ۲۵ مقیاسهای سابق

گندم = ۰/۰۴۸۸۲۸۱ گرم سیر = ۷۵ گرم  
نخود = ۰/۱۹۵۳۱۲۵ » من = ۳ کیلوگرم  
مشقال = ۴/۶۸۷۵ » خروار = ۳۰۰ »

### ۱۶۹ - زمان

واحد : روز : مدت حرکت وضعی زمین  
اجزاء : ساعت =  $\frac{۱}{۲۴}$  روز دقیقه =  $\frac{۱}{۶۰}$  ساعت ثانیه =  $\frac{۱}{۶۰}$  دقیقه

اضعیاف : هفته = ۷ روز ماه = ۲۹ ، ۳۰ یا ۳۱ روز  
سال شمسی = ۳۶۵ روز یا ۳۶۶ روز (در سال کبیسه)  
سال قمری = ۳۵۴ یا ۳۵۵ روز ( )  
قرن = صد سال

سال شمسی ایرانی : شروع : اول فروردین مصادف با عبور کره زمین از نقطه اعتدال ربیعی و روز اول بهار  
سال شمسی ایرانی : ۱۲ ماه دارد از فروردین تا شهریور ۳۱ روز ، از مهر تا بهمن ۳۰ روز اسفند در سال عادی ۲۹ و در سال کبیسه ۳۰ روز  
سال قمری عربی : ۱۲ ماه دارد که متناوباً ۳۰ و ۲۹ روز دارند : ( محرم ، صفر ، ... )

سال شمسی میلادی : شروع اول ژانویه مساوی ۱۱ دی ماهها ژانویه (۳۱) فوریه (۳۰ یا ۲۹) مارس (۳۱) آوریل (۳۰) مه (۳۱) ژون (۳۰) ژوئیه (۳۱) اوت (۳۱) سپتامبر (۳۰) اکتبر (۳۱) نوامبر (۳۰) دسامبر (۳۱)

تعیین یل : در تقویم فرنگی سالهایی که عددشان به ۴ خاتمه یابد یا عدد کبیسه اند جز آنها که با دو صفر ختم میشوند

ک، در اینصورت اگر عدد سال صرف نظر از صفرها به  
 ۴ قابل قسمت باشد سال کیبسه است و الا ساده -  
 در تقویم ایرانی دو هر دوره ۳۳ ساله سالهای ۴ و ۸  
 و ۱۲ و ۱۶ و ۲۰ و ۲۴ و ۲۸ و ۳۲ کیبسه است و سالی  
 سالها ساده

مطابقت تاریخها :

اول فروردین ۱۳۲۶ شمسی هجری در سال ۱۹۴۷ میلادی  
 و ۱۳۶۶ هجری قمری واقع میشود .

## ۲۷ - اعداد مرکب

۱۲۰ - تهریف: متیاسانی را ک، با اجزاء و اضعاف  
 بستگی دهندهی ندارند اعداد مرکب گویند . مانند ساعته و  
 دقیقه و ثانیه یا درجه دقیقه ثانیه یا اندازه های سایر ایران ،  
 ۱۲۱ - در اعمال حسابی مربوط با اعداد مرکب همیشه  
 تبدیل یکهاها بیکهای بالا تر یا پائین تر لازم می آید و این  
 کار بوسیله ضرب و تقسیم صورت میگیرد .

۱۲۲ - افزایشی - در جمع اعداد مرکب یا پستی  
 یکهای هم نوع را زیرهم نوشت و جمع کرد و بمورد اینکه  
 مجموع مساوی یا بزرگتر از یک باشد آن را از جنس  
 آن یک کرد .

۱۲۳ - کاهششی - اگر اعداد نماینده یکهای مختلف  
 در گاهشیاب بزرگتر از اعداد خلیه خود در گاهشته باشند عمل  
 بسط و است انجام پذیر است .

هرگاه یکی از اعداد نماینده یکک، های مختلف در گاهشیاب کوچکتر از عدد نظیر خود در کاسته باشد باید در گاهشیاب يك يکة مرتبه بعد را از جنس يکة مرتبه پائین کرد و بآن افزود آنگاه عمل گاهش را بجا آورد .

۱۲۴ ضرب - برای ضرب اعداد مرکب در يك عدد آن عدد را در هر يك از اعداد نماینده يککهای مختلف ضرب نموده در حاصل ضرب يککها را در صورت احتیاج يکة بالائین تبدیل میکنیم .

۱۲۵ تقسیم - برای تقسیم اعداد مرکب بر يك عدد ابتدا از عدد نماینده بزرگترین يکک شروع کرده عمل تقسیم را بجا می آوریم . بزرگترین نوشته باقیمانده را از جنس يکک مرتبه پائین کرده بر عدد نماینده همان يکک در بخش افزوده در مجموع عمل تقسیم را انجام میدهیم ، باقیمانده جدید را از جنس يکة مرتبه کوچکتر ~~حک~~ کرده و عمل را آنقدر ادامه می دهیم تا تقسیم به پایان رسد .

## ۱۲۶ اربعه متناسبه

۱۲۶ تهریف - مراد از اربعه متناسبه یا بطور مختصر تناسب قواعدي است که بمدد آن مساواتی حل میشود که در آنها کمیتی نسبت مستقیم یا معکوس با چند کمیت دیگر داشته باشد و از آن کمیت يك مقدار معلوم در دست بوده و بمدد نسبت های معروض باید يك مقدار مجهول آنرا بدست آورد .

۱۲۷ - هرگاه تعداد عوامل معلوم و مجهول از ۲

تجاوز نکند تناسب مفرد و اگر عدد آنها بیش از ۴ باشد تناسب را مرکب گویند .

۱۲۸ - هر گاه در تناسب ، نسبت چون کمیات مستقیم باشد تناسب را مستقیم و الا معکوس گویند .

۱۲۹ قاعده - برای حل تناسب مفرد مستقیم مقدار همچنین کمیت مجهول را در نسبت معکوس دو مقدار کمیت دیگر ضرب میکنیم

۱۳۰ - قاعده - برای حل تناسب مفرد معکوس مقدار هم جنس کمیت مجهول را در نسبت مستقیم دو مقدار کمیت دیگر ضرب میکنیم .

۱۳۱ قاعده - برای حل مسائل تناسب مرکب کمیتی را که يك مقدار آن مجهول است پی در پی با هر دو مقدار همچنین از کمیات دیگر می سنجیم و بمورد نسبت مستقیم یا نسبت معکوس دو بدو آن مقادیر را تشکیل داده مقدار همچنین مجهول را در حاصل ضرب کلیه نسبتها ضرب می کنیم تا مقدار مطلوب بدست آید

## ۱۷۱۱ - آمیزه و آلیاژ

۱۳۲ - هر گاه چند نوع اشیاء کالائی را که بهای آن مختلف باشد با هم بیا آمیزیم کالای آمیخته دارای بهای خاصی است که «بهای متوسط» یا فرخ متوسط نامیده میشود . مقداری را که از هر نوع کالای مفروض برداشتیم نسبت آمیزشی گویند مسائل آمیزه بر دو نوعند : ۱ - نسبت آمیزش معلوم است ، باید بهای متوسط را یافت . ۲ - بهای متوسط معلوم است ، باید نسبت آمیزش را بدست آورد .

۱۳۳ - در مسائل نوع اول برای بدست آوردن نرخ متوسط قیمت کلیه مقدار را که از هر جنس برداشته میشود حساب نموده حاصل جمع قیمتها را بر مجموع مقدار کالا تقسیم مینمائیم ۱۳۴ - وقتی نرخ اجناس و نرخ متوسط در دست باشد برای بدست آوردن نسبتی که از هر جنس باید برداشت یا بنظر یقین عمل میکنیم : میزان سود یا زیان حاصل از هر نوع جنس را تعیین نموده سودها را با هم و زیانها را با هم جمع می‌کنیم بعد به نسبت مجموع زیانها از اجناس سود بخش و به نسبت مجموع سودها از جنس‌های زیان بخش برداشته با هم مخلوط میکنیم .

۱۳۵ آلیاژ - جسمی است که از ذوب چند فلز یا یکدیگر بدست آید . هرگاه از یک فلز گرانیها مانند قریه نقره یا فلز دیگری چون مس آلیاژی ترکیب کنیم مقدار فلز قیمتی را که در هر هزار جزء آلیاژ وجود دارد عیار آن نامند ۱۳۶ - برای بدست آوردن وزن فلز قیمتی در یک آلیاژ کافی است وزن آلیاژ را در عیار آن ضرب کرد . ۱۳۷ - مسائل آلیاژ مانند مسائل آمیزه حل میشوند .

### XVIN. مراهجه مفرد (بهره کاری)

۱۳۸ - معمولا هر کس پولی بوام بگیرد برای آمنت گرایه‌ای قائل میشود که بهره یا ربح نام دارد . ۱۳۹ - بهره نسبت مستقیم با سرمایه ، یا مدتی که سرمایه در مراهجه بوده است و با نرخ دارد . یعنی میزان

اچاره واحدیکه در زمان معینی برای سرمایه معینی قابل میشتوند  
نرخ فرنگی یا در صد یعنی سود ۱۰۰ ریال در یکسال  
نرخ ایرانی یعنی سود ۱۰ ریال در یک ماه  
۱۴۰ - برای تبدیل نرخ ایرانی به نرخ در صد کافیست  
آنرا بر حسب شاهی (۵ دینار) بیان نمود و در ۶ ضرب کرد  
مثال : نرخ تومانی (ده ریال) چهار شاهی در ماه برای  
است یا  $6 \times 4 = 24$  یعنی ۲۴٪ در سال .

۱۴۱ - اگر سرمایه را سی ، مدت را هم ، نرخ را  
و بهره را ب بنامیم و مدت را بر حسب سال بیان کنیم :

$$\begin{array}{r} \text{ن} \times \text{م} \times \text{س} \\ \hline ۱۰۰ \quad \text{ب} \times ۱۰۰ \quad \text{س} \\ \hline \text{ن} \times \text{م} \end{array}$$

توضیح - در مسائل بهره کاری یک سال ۳۶۰ و ماه  
۳۰ روز حساب میشود .

۱۴۲ - در صرا بعه مفرد سرمایه ثابت است یعنی سود  
سالانه آن بآن افزوده نمی شود .  
در نوع دیگری از صرا بعه در آخر سال سود سالانه را  
پسرمایه اضافه میکنند . آنرا صرا بعه یا ( بهره کاری ) مرکب  
گویند ( رجوع شود به قسمت جبر )

### ۱۴۳ - قرض بیل

۱۴۳ - در بازار کثانی اغلب بجای پول نقد یا شطاح سند  
داده میشود که در قرض معینی قابل پرداخت است و اگر دارنده

آن سند بخواهد زود تر از آن تاریخ که بسر رسید موسومست  
سند را بیول تبدیل کند باید مبلغی بنام تثزیریل کسر کند و بقیه  
را دریافت دارد. مبلغی را که در سند بازرگانی نوشته شده  
اگرش اسمی و مبلغی که بعد از کسر تثزیریل پرداخته میشود  
اگرش فعلی آن است.

۱۴۴ - تثزیریل با ارزش اسمی و مدت و نرخ تثزیریل نسبت  
مستقیم دارد و مسائل آن عینا مانند مراجه حل میشود.

۱۴۵ - اگر تثزیریل از ارزش اسمی سند کسر شود تثزیریل  
غیر واقعی و اگر ارزش فعلی کسر شود تثزیریل درونی نامیده میشود  
۱۴۶ - تثزیریل درونی عادلانه تر است ولی متداول نیست

$$\frac{100 \times \text{س}}{100 + \text{س}} = \text{تثزیریل درونی}$$

## XX جذر

۱۴۷ - تعریف جذر جذر یا ریشه دوم هر عدد A  
عدد است که  $(a+1)^2 = A+1$

۱۴۸ - برای استخراج جذر اعدادی بین ۱ و ۱۰۰ در  
نظری داشته جذر اعداد يك پیکری که عبارتند از:

جذر ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰

مجموعه ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰

لازم است جذر اعدادی که بین دو عدد پیایی از سطح دوم  
قرار دارند بین دو عدد نظایر شان از سطح اول میباشد و جذر



تقریبی آنها تا يك يكه تقریب باسانی بدست میاید .  
 ۱۴۹ - برای استخراج جذر اعداد از ۱۰۰ بیالا تا يك  
 یكه تقریب بطریق زیر عمل میکنیم :

عدد را از سمت راست بقطعات دو رقمی تقسیم میکنیم  
 جذر قطعه اول سمت چپ را تعیین میکنیم و میگردانیم آنرا از  
 همان قطعه اول سمت چپ کم میکنیم و قطعه دوم را در سمت  
 راست این باقیمانده یابین میآوریم و يك رقم از سمت راست  
 عدد حاصل چندا نموده جزء سمت چپ را بر دو برآوریم و رقم  
 جذر اولین قطعه سمت چپ تقسیم میکنیم خارج قسمت دومین  
 رقم جذر عدد مقروض یا بزرگتر از آنست - پس آنکه امتحان  
 آنرا در سمت راست دو برآور اولین رقم جذر نوشته حاصل  
 را در خود آن عدد ضرب میکنیم و از عددی ۴۵ از اولین  
 باقیمانده و قطعه دوم تشکیل شده است کم میکنیم ؛ اگر  
 تقریب ممکن شد رقم امتحان شده رقم دوم جذر است و آن  
 را در سمت راست رقم اول جذر مینویسیم والا يك واحد از  
 آن کاسته مجدداً امتحان میکنیم تا وقتی که تقریب ممکن  
 شود آنوقت قطعه دیگر را در سمت راست باقیمانده فرود آورده  
 بطریق بالا عمل میکنیم تا بهمین طریق تمام قطعات بکار و نده مثال :

۱۹۷۳۳۸	۳۴۲	۶۸۲
۹	۶۴	۶۴
۸۷۳	۴	۲
۸۵۶	۲۵۶	۱۳۶۴
۱۷۳۸		
۱۳۶۴		
۳۷۴		

عدد ۳۴۲ جذر و ۳۷۴ باقیمانده است

۱۵۰ - برای استخراج جذر اعداد دهدهی تا يك يکته تقریب از جزء دهدهی صرف نظر نموده جذر قسمت درست را تا يك يکته تقریب استخراج میکنیم و جزء دهدهی را به باقیمانده جذر میافزائیم .  
مثال :

$$\begin{array}{r|l} 28 & 77,95 \text{ و } 72,4 \\ \times 48 & 395 \\ \hline 8 & 384 \\ \hline 384 & 11 \text{ و } 72,4 \end{array}$$

عدد ۲۸ جذر و ۷۲۴ و ۱۱ باقیمانده است .  
۱۵۱ - برای استخراج جذر يك عدد درست یا دهدهی تا ۱ ر ۰ یا ۱ ر ۰ یا ... تقریب عدد را از ممیز بعطف راست و چپ بقطعات دو رقمی تقسیم نموده و قطعات سمت راست ( بعد از ممیز ) را با گذاردن يك یا چند صفر کامل میکنیم بطریقی که به تعداد رقمهای دهدهی که میخواهیم در جذر داشته باشیم بعد از ممیز قطعه دورقمی باشد؛ مثلاً اگر منظور محاسبه جذر تا ۱ ر ۰ / ۰ باشد تقریب است باید بعد از ممیز ۶ رقم داشته باشیم . بعد جذر را بقاعده بالا تعیین نموده وقتی در عدد ممیز رسیدیم در جذر نیز ممیز میزنیم و عمل را مانند وقتی که ممیز نباشد ادامه میدهیم .

مثال - جذر ۹۵ ر ۰ تا ۱ ر ۰ تقریب :

۴۹۰۵۰۰۰۰۰	۲۲۲۲۴		
۴۹۵	۴۲	۴۴۲	۴۴۴۴
۸۴	۲	۲	۴
۱۱۰۰	۸۴	۸۸۴	۱۷۷۷۶
۸۸۴			
۲۱۶۰۰			
۱۷۷۷۶			
۳۸۲۴			

عدد ۲۲/۲۴ جذر و ۳۸۲۴/۰ باقیمانده است.

۱۵۲ - اعداد جذر:

جذری را که استخراج شده است معذور نموده با باقیه ها

جمع میکنیم، در صورت صحت باید خود عدد بدست آید.

## XII - کعب

۱۵۳ - کعب یا ریشه سوم عدد  $n$  عدد  $a$  است بقسوسی که

$$n = (a-1-a^3) \times 1000$$

۱۵۴ - برای استخراج کعب اعداد واقع بین ۱ و

۱۰۰۰ در نظر داشتن کعب اعداد یک پیگیری که عبارتند از

کعب ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰

کعب ۱ ۸ ۲۷ ۶۴ ۱۲۵ ۲۱۶ ۳۴۳ ۵۱۲ ۷۲۹ ۱۰۰۰

لازم است و کعب اعدادی که بین دو عدد پیاپی از سهولت

دوم قرار دارند بین دو عدد و اعداد اول میباشند

و کعب آنها با یک پیوسته است و آسانی بدست میآید.

۱۵۵ - برای استخراج کعب اعداد از ۱۰۰۰ بیالا تا يك يكه تقریب بطریق زیر عمل میکنیم :

عدد را از سمت راست بقطعات سه رقمی تقسیم میکنیم، کعب قطعه اول سمت چپ را تعیین میکنیم و قطعه دوم را در سمت راست باقیمانده پائین میآوریم، دو رقم از سمت راستش کنار میگذاریم و جزء سمت چپ را بر سه برابر مجذور رقم اول کعب تقسیم میکنیم، رقم خارج قسمت رقم دوم کعب یا قدری بزرگتر است؛ برای امتحان :

اولا، سه برابر مربع اولین رقم کعب را در ۱۰۰ ضرب کرده مینویسیم،

ثانیا، سه برابر اولین رقم کعب را در عدد امتحان کردنی و در ۱۰ ضرب کرده مینویسیم،

ثالثا، عدد امتحان کردنی را مربع کرده مینویسیم و این عدد ها را جمع نموده حاصل جمع را در عدد امتحان کردنی ضرب میکنیم، اگر حاصل از عددی که از اولین باقیمانده و قطعه دوم تشکیل شده قابل تقریب باشد عدد امتحان کردنی همان رقم دوم کعب است والا باید يك واحد از آن ~~ککم~~ و امتحان را تکرار کرد و آنقدر امتحان را تکرار کرد تا تقریب ممکن شود؛ بعد این رقم را در سمت راست کعب قطعه دوم نوشته قطعه سوم را پائین میآوریم و به همین طریق عمل را تکرار میکنیم تا تمام قطعات بکار روند.

مثال :

۴۴۴۷۱۴۴۴	۳۱۹	۲۸۸۲
۴۷	$2 \times 2 = 27$	$2 \times 312 = 2884$
۵۴۷۱	$4 \times 1 \times 100 = 4700$	$4 \times 312 \times 100 = 488400$
۴۷۸۱	$4 \times 2 \times 10 = 80$	$4 \times 41 \times 10 = 1640$
۴۶۸۰۳۴۴	۲۴	۸۵
۴۶۷۰۷۵۹	۴۸۸۴	۴۹۶۷۵۱
۰۰۰۹۵۶۵	۴	۹
	۵۷۶۸ قابل قبول نیست	۴۶۷۷۵۹
	$4 \times 2 \times 100 = 800$	
	$4 \times 4 \times 10 = 160$	
	۱۴	
	۴۷۹۱	
	۴۷۹۱	

عدد ۳۱۹ کعب و ۹۵۶۵ باقیمانده است .

۱۵۶ - قاعده استخراج کعب اعداد دهدهی نظایر همان قاعده ایست که در باره جذر ذکر شد .

۱۵۷ - استخراج کعب تا ۰ ر یا ۰ ر یا ۰ ر یا ۰ ر یا ۰ ر یا ۰ ر . تقریب شصت بهمان است که در جذر گفته شد ، فقط باید قطعات بعد از ممیز بازاء هر يك رقم دهدهی در کعب سه رقم دهدهی در عدد مفروض باشد .

## XXII - اعداد اصم

۱۵۸ - هرگاه در موقع استخراج ریشه دوم یا ریشه سوم يك عدد ، هر قدر عمل را ادامه دهیم باقیمانده مساوی صفر

نشود عدد را اصم یا گزالت گویند. اعداد غیر اصم را منطقی یا گویا نامند.

۱۵۹ - بجای اعداد اصم در محاسبات عددی معمولاً مقدار تقریبی آنها را بکار میبرند.

۱۶۰ - در مورد جمع و تفریق و ضرب و تقسیم اعداد اصم مقادیر تقریبی آنها را بکار میبریم؛ بدیهی است که نتیجه تقریبی بدست خواهد آمد.

۱۶۱ - ضرب و تقسیم ریشه دوم (چند) :

۱ - حاصل ضرب دو عامل اصم  $\sqrt{a}$  و  $\sqrt{b}$  عبارتست از

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

ممکن است حاصل ضرب ریشه‌های دوم دو مقدار اصم

مقدار منطقی باشد؛ مثلاً :  $\sqrt{144} = \sqrt{8 \times 18} = \sqrt{8} \times \sqrt{18}$

۲ - حاصل ضرب عدد  $a$  در عامل اصم  $\sqrt{b}$  عبارتست از

$$a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab^2}$$

۳ - خارج قسمت دو عامل اصم  $\sqrt{a}$  و  $\sqrt{b}$  عبارتست از

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

ممکن است خارج قسمت ریشه‌های دوم دو مقدار اصم مقدار منطقی باشد؛ مثلاً :

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{18}{8}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

۴ - معمولاً در محاسبات اگر مخرج کسری ریشه دوم عدد اصلی باشد با ضرب صورت و مخرج کسر در مخرج کسر مخرج را منطبق مینمایند؛ مثلاً :

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} \quad \text{و} \quad \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{b}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a-b}} = \frac{\sqrt{a-b}}{a-b} \quad \text{و} \quad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

پایان

## ۱- تعاریف

- ۱- جبر علمی است که برای تعمیم دستورها و تسهیل حل مسائل بنکار میرود.
- ۲- حروفها - درجبر مقادیر معلوم را معمولاً با حروف اول الفباء لاتین (a و b و c و ....) و مقادیر مجهول را با حروف آخر (x و y و غیره) نمایش میدهند.
- ۳- نشانه‌ها - نشانه‌ها یا علامات برای نشان دادن اعمال یا رابطه‌هایی که باید بین اعداد و حروف برقرار باشد بنکار میروند.
- علامت  $+$  - نشانه جمع ، علامت  $-$  - نشانه تفریق ، علامت  $\times$  یا  $\cdot$  - نشانه ضرب و علامت  $:$  یا  $\div$  - نشانه تقسیم دو عدد میباشد.
- علامت  $=$  - نشانه مساوی بودن و علامت  $\neq$  - نشانه اختلاف و علامت  $>$  - نشانه بزرگتر یا  $<$  - کوچکتر بودن است بطوری که در داخل زاویه عدد بزرگتر و بیرون زاویه عدد کوچکتر نوشته میشود مثلاً  $2 < 5$  نشان میدهد که 2 کوچکتر است از 5. و  $5 > 2$  نشان میدهد که 5 بزرگتر یا اقلاً مساوی 2 میباشد. وقتی مقادیری با علامت  $+$  یا  $-$  یا  $\times$  یا  $:$  در داخل پرانتز ( ) ، یا کروشه [ ] یا آکولاد { } قرار داشته



باشند حکم مقدار واحد را پیدا میکنند .

علامت  $\sqrt{\quad}$  علامت استخراج ریشه n ام مقدار واقع در زیر  $\sqrt{\quad}$  است .

۴ - یادآوری - باید متذکر بود که در موقع حساب کردن هر عبارتی که در آن اعمال جمع و تفریق و ضرب و تقسیم باشد باید اول اعمال ضرب و تقسیم و بعد اعمال جمع و تفریق را انجام داد .  
۵ - عدد چپری - یولی که وارد حسابدوق یا تجارتخانه میشود یا از آن خارج میگردد هر دو پولند و لسی در معنی اختلاف دارند اولی به پول موجود در حسابدوق اضافه شده و دومی از آن کسر گردیده است ؛ میگویند جهت پول اول با دوم فرق دارد و برای تمییز دادن آنها از یکدیگر اولی را با علامت  $+$  ( مثبت ) و دومی را با علامت  $-$  ( منفی ) نشانه میکنند و این عدد حسابی را که با یکی از دو علامت مقدار کور ممتاز شده است عدد چپری نامند . عدد چپری ۵ - تلفظ میشود منهای ۵ و ۷ - تلفظ میشود باضافه ۷ .

۶ - عدد های حسابی را قدر مطلق عددهای چپری گویند مثلاً در مثال بالا عدد حسابی ۵ قدر مطلق عدد چپری ۵ - میباشد .

۷ - دو عدد چپری مساویند وقتی که دارای یک قدر مطلق و یک نشانه باشند .

۸ - دو عدد چپری قرینه اند وقتی که دارای یک قدر مطلق ولی نشانه های مختلف باشند .

- ٩- یادآوری - بعضی مواقع در عمل نشانه  $-$  را از جلوی اعداد جبری بر داشته و آنها را بدون نشانه مینویسند؛ ولی هیچوقت اعداد منفی را بدون نشانه  $-$  مینویسند.
- ١٠- عبارت جبری - مجموعه‌ای از حروف و اعداد و علاماتی را که در یک رشته محاسبات بنکار میروند عبارت جبری می نامند.
- ١١- عبارت جبری منطبق (گویا) است وقتی که در آن حرفی زیر رادیکال نباشد و در غیر اینصورت، اصم است.
- ١٢- عبارت جبری صحیح است وقتی که شامل حرفی در مخرج نباشد و در غیر اینصورت کسری است.
- ١٣- دو عبارت جبری را متعادل گویند وقتی مقدار عددی آنها با ازاء تمام مقادیری که بجای حروف بگذاریم مساوی باشند.
- ١٤- تساوی بین دو عبارت عددی و یا دو عبارت جبری متعادل را اتحاد گویند و بین آنها این علامت  $\equiv$  (تلفظ میشود متحد است یا) را میگذارند.
- ١٥- اگر تساوی بین دو عبارت جبری فقط و فقط با ازاء مقادیر مخصوصی از حروف برقرار شود آن تساوی را معادل گویند.
- ١٦- یکجمله - اگر عبارتی جبری از حاصل ضرب اعداد جبری با حروف بدست آمده باشد آن را یکجمله یا منم گویند.
- ١٧- ضرب - عامل عددی هر یکجمله را ضرب آن گویند.
- ١٨- یکجمله‌های متشابه اختلافشان فقط در ضرایبشان میباشد.

۱۹- چند جمله - مجموع چند یکجمله  $\rightarrow$  یک جمله یا یک جمله یا یکی هم را تشکیل میدهند.

## II- جمع اعداد جبری

۲۰- برای جمع دو عدد متعدهالامه قدر مطلق آنها را جمع نموده علامت مشترک را میگذاریم.

۲۱- برای جمع دو عدد متعدهالامه قدر مطلق آنها را از هم کم نموده علامت عددی را که بر حسب قدر مطلق بزرگتر است میگذاریم.

## III- تفریق اعداد جبری

۲۲- برای کم کردن عدد را از قرینه او را با جمع می کنیم.

## IV- ضرب اعداد جبری

۲۳- حاصلضرب دو عدد متعدهالامه مثبت و حاصلضرب دو عدد متعدهالامه منفی است.

۲۴- برای ضرب چند عدد جبری قدر مطلق آنها را ضرب نموده اگر تعداد اعداد منفی زوج باشد حاصلضرب مثبت و اگر فرد باشد منفی میگذاریم.

## V- تقسیم اعداد جبری

۲۵- برای تقسیم دو عدد جبری قدر مطلق آنها را تقسیم نموده اگر هر دو متعدهالامه باشند جوی خارج قسمت

۱- و اگر مختلف العلامة باشند — قرار میدهیم.

## ۷۱- قوه (توان)

۲۶- برای تعریف قوه  $m$  ام رجوع شود بشماره ۲۹ بخش حساب .

۲۷- قوه  $m$  ام هر عدد مثبت همواره مثبت است .

۲۸- قوه  $m$  ام عدد منقی مثبت است اگر  $m$  زوج باشد و منقی است اگر  $m$  فرد باشد.

۲۹- ضرب چند قوه مسا — اگر پایه ها مشترك باشند یکی از پایه ها را نوشته و نماها را با هم جمع میکنیم :

$$a^{m+1} + a^m + a^p + \dots + a^n + a^m$$

ب- اگر نماها مساوی باشند پایه ها را در هم ضرب نموده نمای مشترك را نما قرار میدهیم :

$$a^m (abc)^m + a^m + a^m + a^m$$

۳۰- تقسیم شو قوه — اگر پایه ها مساوی باشند یکی از پایه ها را نوشته نماها را از هم کم میکنیم :

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

ب- اگر نماها مساوی باشند پایه ها را تقسیم نموده نمای مشترك را نما قرار میدهیم

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

۳۱- یادآوری- هر عدد بقره صفر مساوی است با یک.

۳۲- قوه کسری -- اگر داشته باشیم  $\frac{p}{a}$  آنرا

میتوان باینصورت نوشت :

$$\frac{p}{a} = \frac{p}{\sqrt{a^2}}$$

۱- حاصل ضرب دو قوه کسری يك عدد :

$$\frac{p}{a} \times \frac{p'}{a'} = \frac{pp'}{aa'}$$

ب خارج قسمت دو قوه کسری يك عدد

$$\frac{\frac{p}{a}}{\frac{p'}{a'}} = \frac{pa'}{ap'}$$

ج- قوه کسری حاصل ضرب چند عدد :

$$\left(\frac{p}{a}\right) \left(\frac{p'}{a'}\right) \left(\frac{p''}{a''}\right) = \frac{pp'p''}{aa'a''}$$

د- بقوه کسری رساندن قوی کسری يك عدد :

$$\left(\frac{p}{a}\right) \frac{p'}{q} = \frac{pp'}{aq}$$

۳۴- قوه منفی :

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

۱- حاصل ضرب دو قوه منفی از يك عدد

$$a^{-m} \times a^{-m'} = a^{-(m+m')} = \frac{1}{a^{m+m'}}$$

ب- خارج قسمت دو قوه منفی از يك عدد :

$$\frac{a^{-m}}{a^{-m'}} = a^{-m+m'} = \frac{1}{a^{m-m'}}$$

ج - قوه منفی حاصل ضرب چند عدد

$$(abc) - m = a - m \times b - m \times c - m$$

د - بقوه منفی رساندن قوه منفی يك عدد

$$(a - m) - m' = a m m'$$

این دوابطه بر حسب تغییر علامت  $m$  و  $m'$  متغیر میباشند.

ه - قوه منفی کسری:

$$a - \frac{p}{q} = \frac{p}{\sqrt{a^q}}$$

## VII - جمع جمل جبری

۳۴ - برای جمع چند جمله جبری متشابه یکی از آنها را نوشته و ضرائب آنها را جمع جبری مینمائیم.

۳۵ - برای جمع چند کثیرالاجمله ، جمل متشابه را با هم جمع نموده و جمل غیر متشابه را دنبال آنها مینویسیم.

## VIII - تفریق جمل جبری

۳۶ - برای تفریق دو کثیرالاجمله علامت جمل کاسته را تغییر داده و با کاهشیاب جمع جبری مینمائیم .

## IX - ضرب جمل جبری

۳۷ - حاصل ضرب چند يك جمله يك جمله ایست كه ضربیش مساوی حاصل ضرب ضرائب آنها بوده شامل تمام حروف آن جمل باشد ، نمای هر يك از حروف مساوی مجموع نمائیم كه آن حرف در هر يك جمله داشته باشد .

۳۸ - برای ضرب یکجمله در يك كثيرالجمله يك - جمله مزبور را در هر يك از جمله كثيرالجمله ضرب می‌نمائیم و حاصل‌ضربها را با هم جمع جبری می‌کنیم .

۳۹ - برای ضرب دو كثيرالجمله هر يك از جمله كثير - الجمله اول را در كثيرالجمله دوم ضرب نموده و حاصل‌ضربها را با هم جمع جبری می‌کنیم .

### ۴۰ - تقسیم جمل جبری

۴۰ - برای تقسیم دو جمله جبری ضرائب آنها را تقسیم جبری نموده اجزاء نظایر هم را برهم تقسیم می‌کنیم ، مثال :

$$\begin{array}{r} ۱۷۵۰۴ : ۴ = ۴۳۷۶ \\ ۱۵۰۰۰ : ۵ = ۳۰۰۰ \end{array}$$

۴۱ - برای تقسیم يك كثيرالجمله بر يكجمله اول كثيرالجمله مقسوم را بر حسب قوای نزولی مرتب نموده بعد هر يك از جمله را بر يكجمله مقسوم علیه تقسیم می‌نمائیم و خارج قسمتها را با هم جمع جبری می‌کنیم . مثال :

$$\begin{array}{r} ۱۷۵۰۴ - ۳۰۰۰ = ۱۴۵۰۴ \\ \underline{۲۵۰۰۰} \\ ۲۵۰۰ \end{array}$$

۴۲ - برای تقسیم دو كثيرالجمله آنها را بترتیب قوای نزولی مرتب نموده جمله اول مقسوم را بر اولین جمله مقسوم علیه تقسیم کرده خارج قسمت را در تمام جمله مقسوم علیه ضرب نموده حاصل ضرب را از مقسوم کم می‌کنیم تا اولین باقیمانده بدست آید ، بعد اولین جمله مانده را بر جمله اول مقسوم علیه تقسیم کرده خارج قسمت را در تمام جمله مقسوم علیه ضرب می‌نمائیم و حاصل را از جمله‌های مانده می‌کنیم تا دومین مانده

بدست آید و همین طریق عمل را ادامه میدهیم تا وقتی که باقیمانده دیگر بر مقبوم علیه قابل قسمت نباشد.

$$\begin{array}{r}
 1x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \\
 \underline{1x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0} \\
 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \\
 \underline{0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0} \\
 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \\
 \underline{0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0} \\
 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \\
 \underline{0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0} \\
 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0
 \end{array}$$

۴۳- قابلیت تقسیم کثیرالاجمله از  $x$  بر  $(x+a)$  - کثیرالاجمله  $P(x)$  بر  $(x+a)$  وقتی قابل قسمت است که اگر در  $P(x)$  بجای  $x$ ،  $-a$  قرار دهیم حاصل صفر شود یعنی  $P(-a) = 0$  مثال :

$$x^4 + x^3 - 3ax^4 - 3ax^3$$

بر  $x+a$  قابل قسمت است زیرا چون در آن بجای  $x$  مقدار  $(-a)$  را قرار دهیم حاصل صفر می شود.

همچنین  $P(n)$  بر  $x-a$  وقتی قابل قسمت است که اگر در آن بجای  $x$  مقدار  $a$  بگذاریم حاصل صفر شود.

### ۴۴- اتحادهای مهم

۴۴- تعریف- اتحاد عبارت از یک تساوی است که برای مجموع مقادیری که در دو طرف آن بجای حروف قرار دهیم همواره



صحیح باشد. برای ممتاز ساختن اتحادها از تساویهای معمولی غالباً بین طرفین بجای علامت  $\equiv$  گذاشته میشود.

$$(۱) (a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$$

$$(۲) (a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$$

$$(۳) (a-b)(a+b) \equiv a^2 - b^2$$

$$(۴) (a+b+c+d)^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

$$(۵) (a+b)^2 \equiv a^2 + 2a^2b + 2ab^2 + b^2$$

$$(۶) (a-b)^2 \equiv a^2 - 2a^2b + 2ab^2 - b^2$$

$$(a^2 + b^2) \equiv (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a^2 - b^2) \equiv (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

۴۵ رابطه قیتاغورت :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \equiv ab$$

۴۶ رابطه اولر :

$$a(c-b) + b(a-c) + c(b-a) \equiv 0$$

۴۷ - رابطه استوارت :

$$a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a) + (c-b)(a-c)(b-a) \equiv 0$$

۴۷ - بینم ( دو جمله ) نیوتن

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} a^{n-2}b^2 +$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3}b^3 + \dots + b^n$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times p} a^{n-p} a^p + \dots$$

$$\dots + a^n$$

## XII ریشه و ریشگی ها

تعریف - ریشه  $m$ ام عدد  $A$  عددی است مانند  $a$  که اگر بقوه  $m$ ام برسد حاصل مساوی  $A$  گردد

$$a^m = A \quad m\sqrt{A} = a$$

$m$  را نماینده یا شمار ریشگی گویند.

۴۹ - ریشه اعداد جبری

(۱) ریشه زوج هر عدد مثبت دو عدد قرینه است،

$$\sqrt[4]{625} = \pm 5$$

(ب) اعداد منفی دارای ریشه زوج نیستند.

(ج) علامت ریشه فرد هر عدد یا علامت خود آن یکست.

۵۰ - ریشه دوم ۱ - عددیست موهوم و آنرا مساوی  $i$

فرش میکنند،

$$\sqrt{-1} = i$$

۵۱ - اگر نماینده ریشگی و نمای مقدار زیر آنرا در

عدد ضرب یا بر عددی تقسیم کنند در مقدار ریشگی تغییری حاصل نمیشود،

$$m\sqrt{a^p} = n m\sqrt{a^p n} = \frac{m}{n} \sqrt{\frac{a^p}{n}}$$

## ۵۲ - تجویز دل چند ریشگی بیك نماینده -

برای تجویز دل چند ریشگی بر ریشگی‌هایی که دارای يك نماینده باشند كوچك ترین مضرب مشترك نماینده های ریشگی‌ها را نماینده مشترك قرار داده و آنرا بر نماینده هر ریشگی تقسیم و حاصل را در نمای مقدار زیر ریشگی ضرب مینمائیم.

مثال - میخواهیم نماینده ریشگی‌های  $\sqrt{a}$   $\sqrt{b^3}$   $\sqrt{c^4}$  را یکی نمائیم، کم ۶ و ۸ و ۹ عدد ۷۲ است پس:

$$\sqrt{11^4} = 11^2 \sqrt{11^4} \quad \sqrt{b^3} = b^2 \sqrt{b^3} \quad \sqrt{a} = a^2 \sqrt{a}$$

## ۵۳ - ضرب ریشگی‌ها

۱ - برای ضرب چند ریشگی که دارای نماینده مشترك  $m$  باشند مقدار زیر ریشگی‌ها را ضرب نموده و از حاصل ضرب ریشه  $m$  ام میگیریم:

$$m \sqrt{a^p b^q c^r} = m \sqrt{a^p b^q c^r} = m \sqrt{a^p b^q c^r}$$

ب - برای ضرب چند ریشگی که دارای نماینده مشترك نباشند نخست نماینده ریشگی‌ها را یکی میکنیم سپس مانند حالت قبل ضرب مینمائیم.

## ۵۴ - تقسیم ریشگی‌ها

۱ - برای تقسیم دو ریشگی که دارای نماینده مشترك  $m$  باشند مقادیر زیر ریشگی‌ها را تقسیم نموده و از خارج قسمت ریشه  $m$  ام میگیریم

$$\frac{m \sqrt{a^p}}{m \sqrt{b^q}} = \frac{m \sqrt{a^p}}{\sqrt{b^q}}$$

ب - برای تقسیم دو ریشگی که دارای نماینده مشترک نباشند نخست نماینده آنها را مساوی نموده بعد آنها را تقسیم می‌نمائیم.

۵۵ - برای اینکه عددی را داخل يك ریشگی نمائیم آنرا بقوه نماینده ریشگی رسانده در مقدار زیر ریشگی ضرب می‌کنیم:

$$a^m \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^m \cdot b}$$

۵۶ - برای اینکه عددی را از زیر ریشگی خارج کنیم نمای آنرا بر نماینده ریشگی تقسیم می‌کنیم و خارج قسمت را نمای آن عدد در خارج ریشگی و باقیمانده تقسیم را نمای آن عدد در زیر ریشگی قرار می‌دهیم:

$$\sqrt[n]{a^m \cdot b^{n-1}} = b \sqrt[n]{a^m \cdot b}$$

۵۷ - برای اینکه ریشگی را بقوه‌ای رسانیم کافیست مقدار زیر ریشگی را بآن قوه رسانیم:

$$\left( \sqrt[n]{a} \right)^p = \sqrt[n]{a^p}$$

۵۸ - برای آنکه از ریشه  $a^m$  عددی ریشه  $a^n$  بگیریم

بگیریم کافی است که از آن ریشه  $a^{mn}$  بگیریم

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

۵۹ - هر ریشه - حرفی را که زیر ریشگی باشد و نتوان آنرا خارج نمود گوییم گویند و اگر از زیر ریشگی خارج شود گویا نامند.

۶۰ - گویا یا نمودن کسری که مخرجش سنگین باشد .  
 ۱ - مخرج کسر يك جمله است - برای گویا کردن آن صورت و مخرج کسر را در عبارتی ضرب میکنیم که مخرج گویا شود، مثلاً اگر مخرج  $\frac{m}{\sqrt{b}p}$  باشد صورت و مخرج را در  $\frac{m\sqrt{b}m-p}{\sqrt{b}m-p}$  ضرب میکنیم .

$$\frac{a}{\frac{m}{\sqrt{b}p}} = \frac{a \times \frac{m\sqrt{b}m-p}{\sqrt{b}m-p}}{\frac{m\sqrt{b}p}{\sqrt{b}m-p} \times \frac{m\sqrt{b}m-p}{\sqrt{b}m-p}} = \frac{a \times \frac{m\sqrt{b}m-p}{\sqrt{b}m-p}}{b}$$

تعریف - مزدوج دو جمله  $a+b$  دو جمله  $a-b$  است .  
 ب - مخرج کسر دو جمله است - برای گویا کردن کسر صورت و مخرج آن را در مزدوج مخرج ضرب میکنیم

$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$$

### XIII - معادلات

۶۱ - تعریف - معادله عبارت از يك تساوی است که

فقط دو طرف آن بازاایك یا چند مقدار معین که بجای مجهول آن قرار میدهم باید یکدیگر مساوی شوند.

۶۲ - توجه کنید! فرق معادله با اتحاد این است که معادله بازاایك یا چند مقدار معین صحیح است و اتحاد بازاای جمیع مقادیر.

### ۶۳ - خواص معادلات

۱ - اگر برطرفین معادله يك عدد چپری اضافه کنیم در معادله تفاوتی حاصل نمیشود.

۲ - اگر طرفین معادله را بر يك عدد تقسیم یا در يك عدد ضرب بنمائیم در معادله تغییری حاصل نمیشود.

۳ - اگر عددی را از يك طرف معادله به طرف دیگر ببریم باید علامت آنرا تغییر دهیم.

### ۶۴ - حل و بحث معادلات درجه اول

معادله درجه اول يك مجهولی پس از اختصار بصورت کلی  $ax = b$  نوشته میشود.

اگر  $a \neq 0$  باشد معادله دارای يك ریشه  $x = \frac{b}{a}$  خواهد بود.

اگر  $a = 0$  و  $b \neq 0$  باشد معادله غیر ممکن است.

اگر  $a = 0$  و  $b = 0$  باشد معادله مبهم است.

اگر  $a \neq 0$  و  $b = 0$  باشد ریشه معادله صفر است.

برای اینکه دو معادله درجه اول  $ax = b$  و  $a'x = b'$

دارای يك ریشه باشند باید  $ab' = ba'$  باشد.

۶۵ - دستگاههای دو معادله دو مجهولی درجه اول  
 دستگاههای دو معادله دو مجهولی درجه اول پس از  
 اختصار باین صورت نوشته میشود:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

برای حل دستگاههای دو معادله دو مجهولی درجه اول چهار طریقه معمول است :

۱ - طریقه تعویض - از معادله اول بفرش معلوم بودن یکی از مجهولها مجهول دیگر را بدست آورده در معادله دوم قرار میدهیم، در نتیجه يك معادله يك مجهولی درجه اول پیدا میشود که با حل آن یکی از مجهولها بدست میآید. با معلوم شدن يك مجهول پیدا کردن دیگری بوسیله یکی از آن دو معادله خیلی آسان است .

ب - طریقه حذف - در این طریقه ضرایب یکی از مجهولها را در دو معادله بدو عدد قرینه تبدیل میکنیم، از جمع کردن دو معادله يك معادله يك مجهولی بدست میآید که با حل آن يك مجهول پیدا میشود. با معلوم شدن يك مجهول پیدا کردن دیگری ساده است.

ج - طریقه قیاسی - یکی از مجهولات را بفرش معلوم بودن مجهول دیگر در هر يك از دو معادله پیدا نموده دو مقدار را که برای آن بدست میآید مساوی قرار میدهند. پس از حل این تساوی یکی از مجهولات بدست میآید و با معلوم بودن يك مجهول میتوان مجهول دیگر را از یکی از دو معادله پیدا نمود .

د - یوسیده فرمولهای گرامر - ریشه‌های دو معادله دو مجهولی درجه اول عبارتند از :

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

. اگر  $ab' - ba' \neq 0$  باشد معادله دارای جواب است

۶۶ - معادله درجه دوم

ریشه‌های معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  عبارتند از

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

یا اگر  $b' = 0$  و فرض شود  $x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$   $x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - 4ac}}{a}$

ا - اگر  $\Delta$  (مبین) منفی باشد معادله دارای ریشه نیست.

ب - اگر  $\Delta$  (مبین) مساوی صفر باشد معادله دارای

ریشه مضاعف  $x = \frac{-b}{2a}$  یا  $x = \frac{-b'}{a}$  است.

شرط لازم و کافی برای اینکه یک معادله درجه دوم

دارای ریشه باشد آنستکه مبین آن مثبت باشد.

۶۷ - روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم

$$x' + x'' = \frac{-b}{a}$$

ا - حاصل جمع ریشه‌ها

$$x' x'' = \frac{c}{a}$$

ب - حاصل ضرب ریشه‌ها



ج - تفاضل ریشه‌ها

$$x' - x'' = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$$

۶۸ - حاصل جمع قوای متشابه ریشه‌های یک

معادله درجه دوم.

اگر مجموع قوای درام ریشه‌های معادله درجه دومی را

$S_p$  فرض کنیم یعنی  $S_p = x'P + x''P$  باشد روابط ذیل را خواهیم داشت :

$$S_1 = x' + x'' = -\frac{b}{a}$$

$$S_2 = x'^2 + x''^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$S_3 = x'^3 + x''^3 = \frac{2abc - b^3}{a^3}$$

$$aS_2 + bS_1 + 2c = 0$$

$$aS(P+2) + bS(p+1) + cSp = 0$$

۶۹ - اگر  $S$  مجموع و  $P$  حاصل ضرب دو عدد باشد

آن دو عدد ریشه‌های این معادله‌اند:  $x^2 - Sx + P = 0$

۷۰ - اگر  $d$  تفاضل و  $p$  حاصل ضرب دو عدد باشد آن

دو عدد ریشه‌های این معادله می‌باشند:  $x^2 - dx - P = 0$

۷۱ - علامت ریشه‌های معادله درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0$$

۱ - اگر  $\frac{c}{a} > 0$  و یا  $ac < 0$  باشد  $x'$  و  $x''$

مختلف‌العلامه هستند.

# حل و بحث و معادلات

صفحه ۵۷

- ب - اگر  $\Delta > 0$  یا  $\Delta < 0$  باشد دو ریشه متجانس علامه هستند
- ج - اگر  $\Delta > 0$  یا  $\Delta < 0$  باشد دو ریشه منقبی هستند
- د - اگر  $\Delta > 0$  یا  $\Delta < 0$  باشد دو ریشه مثبت میباشند
- برای آسان شدن بحث فرض میکنیم ریشه ای که بر حسب قدر مطلق بزرگتر است  $x'$  و ریشه دیگر  $x''$  باشد. جدول ذیل علائم ریشهها را مشخص میسازد :

علامت ریشهها	$\frac{c}{a}$	$\Delta$
$x' > 0, x'' > 0$	+	+
$x' < 0, x'' < 0$	+	+
$x' > 0, x'' = 0$	0	+
$x' < 0, x'' = 0$	0	+
$x' > 0, x'' < 0$	-	+
$x' < 0, x'' > 0$	-	+
$ x'  =  x'' $	-	+
$x' = x'' > 0$	-	0
$x' = x'' < 0$	-	0
ریشهها موهومند	-	-

## XIV - سه جمله درجه دوم

$$y = ax^2 + bx + c$$

۷۲ - سه جمله

یا این صورت نوشته میشود :

$$y = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} - \frac{c}{a}$$

حالات اول - اگر  $\Delta$  یعنی  $b^2 - 4ac > 0$  باشد  $y = 0$  دارای دو ریشه  $x'$  و  $x''$  خواهد بود و سه جمله بصورت

$$y = a(x - x')(x - x'')$$

درمیآید. در اینصورت اگر به  $x$  مقادیر خارج دو ریشه داده شود علامت سه جمله یا علامت  $a$  یکی است و اگر مقادیری بین  $x'$  و  $x''$  بدهیم علامت سه جمله مخالف علامت  $a$  است.

$$b^2 - 4ac = 0$$

حالات دوم -

در اینصورت

$$y = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

و علامت سه جمله همیشه با علامت  $a$  یکی است.

$$b^2 - 4ac < 0$$

حالات سوم -

در اینصورت  $y = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + m$  است

و باز هم علامت سه جمله همیشه با علامت  $a$  یکی است.

خلاصه - علامت سه جمله درجه دوم با  $a$  مقادیری که

بین ریشه‌ها باشند (در صورت وجود دو ریشه) مخالف علامت

$a$  و با  $a$  سایر مقادیر هم‌وافتی علامت  $a$  است.

۷۳ - مقایسه عدد با ریشه های سه جمله درجه دوم

$$ax^2 + bx + c$$

شرط لازم و کافی برای اینکه عدد  $\alpha$  بین ریشه ها قرار داشته باشد آنست که  $af(\alpha) \leq 0$  باشد.  
 ب - شرط لازم و کافی برای اینکه عدد  $\alpha$  کوچکتر از دو ریشه باشد:

$$\alpha < -\frac{b}{2a} \text{ یا } \alpha > -\frac{b}{2a} \text{ و } af(\alpha) > 0 \quad \Delta > 0$$

ج - شرط لازم و کافی برای اینکه  $\alpha$  بزرگتر از دو ریشه باشد:

$$\alpha < -\frac{b}{2a} \text{ یا } \alpha > -\frac{b}{2a} \text{ و } af(\alpha) > 0 \quad \Delta > 0$$

۷۴ - مقایسه دو عدد  $\alpha$  و  $\beta$  با ریشه های سه جمله

$$ax^2 + bx + c$$

(برای آسان شدن تخت است  $\alpha$  را از  $\beta$  و  $x''$  را از  $x'$  کوچکتر فرخت میکنیم). هرگاه:

$$\begin{array}{lll} \alpha < x'' < \beta < x' & \text{و} & af(\alpha) > 0 \\ x'' < \alpha < x' < \beta & \text{و} & af(\beta) > 0 \\ \alpha < \beta < x'' < x' & \Delta > 0 & \alpha < \beta < -\frac{b}{2a} \\ x'' < x' < \alpha < \beta & \Delta < 0 & -\frac{b}{2a} < \alpha < \beta \\ x'' < \alpha < \beta < x' & af(\alpha) < 0 & \end{array}$$

۷۵ - مقایسه ریشه های دو سه جمله

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های سه‌جمله

$$f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$$

و  $x_1'$  و  $x_2'$  ریشه‌های سه‌جمله باشند :

شرط لازم و کافی برای اینکه دو سه‌جمله دارای

يك ریشه مشترك باشند :

$$R = (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') = 0$$

اگر  $R = 0$  و  $ab' - ba' \neq 0$  باشد ریشه مشترك عبارتست از

$$x = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

اگر  $R \neq 0$  باشد دو سه‌جمله دارای ریشه مشترك نیستند.

ب- شرط لازم و کافی برای اینکه دو سه‌جمله دارای

دو ریشه مشترك باشند آنستکه

$$\Delta > 0 \text{ و } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \text{ باشد}$$

ج- شرط لازم و کافی برای اینکه يك ریشه یکی از

سه جمله‌ها مابین ریشه‌های سه جمله دیگر واقع باشد آنستکه

$R < 0$  باشد به علاوه :

$$\text{اگر } R < 0 \text{ و } -\frac{b}{2a} < -\frac{b'}{2a'} \text{ ، } x_1' < x_2' < x_1 < x_2$$

$$\text{اگر } R < 0 \text{ و } -\frac{b}{2a} > -\frac{b'}{2a'} \text{ ، } x_2' < x_1' < x_2 < x_1$$

## ۷۶ معادلات قابل تبدیل به معادله درجه دوم

۷۶ - معادله دو مجهولی  $ax^2 + bx + c = 0$

۱ - شرط کافی برای اینکه این معادله دارای دو

ریشه باشد آنستکه  $-\frac{c}{a} > 0$  یا  $ac < 0$  باشد و دو ریشه آن عبارتند از :

$$x = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

۲ - شرط لازم و کافی برای آنکه معادله فوق دارای چهار ریشه مشخص باشد آنستکه :

$$\frac{c}{a} > 0 \quad \text{و} \quad \frac{b}{a} > 0 \quad \text{و} \quad b^2 - 4ac > 0$$

۳ - شرط لازم و کافی برای آنکه معادله دو مجهولی دارای ریشه مضاعف باشد این است که

$$\frac{b}{a} > 0 \quad \text{و} \quad b^2 - 4ac = 0 \quad \text{باشد و ریشه آن عبارتست از}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{-b}{2a}}$$

۴ - اگر  $c = 0$  باشد دو تا از ریشه‌های معادله فوق

صفر می‌باشند و دو ریشه دیگر  $x = \pm \sqrt{\frac{-b}{a}}$  خواهند بود اگر  $\frac{b}{a} > 0$  باشد.

## ۷۷ معادلات همگوسه

تعریف - معادله را همگوسه گویند در صورتیکه ریشه‌های آن عکس یکدیگر باشند مثلاً اگر  $a$  یکی از

ریشه‌های معادله معکوسه درجه دوم باشد ریشه دیگر آن  $\frac{1}{a}$  خواهد بود.

در معادلات معکوسه ضرایب جمله هائیکه از وسط معادله بیک فاصله باشند مساوی هستند.

۷۸ - حل معادلات معکوسه

معادله معکوسه‌ای که بزرگترین درجه معکول آن فرد باشد

بر  $x \pm 1$  قابل قسمت است بشا بر این  $\pm 1$  یکی از ریشه‌های آن است

و برای پیدا کردن سایر ریشه‌ها معادله را بر  $x \pm 1$  تقسیم

نموده ریشه خارج قسمت را مطابق قواعد پیش پیدا میکنیم.

ب - معادلات معکوسه‌ای که درجه آنها زوج باشد برای

نمونه معادله درجه چهارم معکوسه زیر را حل میکنیم :

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + a = 0$$

طرفین معادله را بر  $x^2$  تقسیم میکنیم

$$x^2 + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3} + \frac{a}{x^4} = 0$$

از ضرایب مساوی فاکتور میگیریم :

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

فرض میکنیم  $x + \frac{1}{x} = y$  آنوقت  $y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$

و معادله بصورت زیر در میآید

$$y^2 + by + c - 2 = 0$$

$$ay^2 + by + c - 2a = 0$$

برای حل و بحث بشماره ۶۶ مراجعه شود .

۷۹ - معادلات معکوسه درجه سوم

۱ - معادله نوع اول معکوسه درجه سوم

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

دارای يك ریشه  $x = -1$  است و ریشه های ديگرش ریشه های

معادله درجه دوم  $ax^2 + (b - a)x + d = 0$  مي باشد

۲ - معادله نوع دوم

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

دارای يك ریشه  $x = 1$  است و ریشه های ديگر آن ریشه های معادله

درجه دوم  $ax^2 + (a + b)x + d = 0$  مي باشد

۸۰ - معادله معکوسه درجه چهارم

۱ - نوع اول  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

اگر  $y = x + 1$  و ریشه های معادله درجه دوم  $ay^2 + by + c - 2a = 0$

باشد (۷۸) ریشه معادله معکوسه عبارتند از ریشه های معادله

$$x^4 + 1 = 0 \quad \text{و} \quad x^4 + y^2x + 1 = 0$$

۲ - نوع دوم

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

ریشه های اين معادله عبارتند از:  $x = \pm 1$  و ریشه های معادله

$$ax^2 + bx + e = 0$$

۸۱ - معادله معکوسه درجه پنجم

۱ - نوع اول

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

دارای يك ریشه  $x = -1$  است و ریشه های ديگر آن ریشه های

معادله معکوسه درجه چهارم ذيل است:



$$ax^4 + (b-a)x^3 + (c-b+a)x^2 + (b-a)x + a = 0$$

ب - نوع دوم

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + a = 0$$

که دارای يك ریشه  $x = 1$  میباشد و ریشه های دیگر آن ریشه های معادله درجه چهارم

$$ax^4 + (a+b+c)x^3 + (a+b+c)x^2 + (a+b)x + a = 0$$

۸۲ معادلات اصم - برای حل معادلات اصم طرفین معادله را تقوّه میرسانیم تا معادله منطقی بدست آید، بعد معادله حاصل را بر طبق قواعد فوق حل میکنیم.

مثال

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x-6} = \sqrt{x+10}$$

طرفین را بقوّه ۲ میرسانیم :

$$x+10 = x-1+2\sqrt{x-6}+x-6 \Rightarrow 2\sqrt{x-6} = 7-x$$

و یا

$$2\sqrt{x-6} = 7-x$$

باز طرفین را بقوّه ۲ میرسانیم

$$4(x-6) = 49 - 14x + x^2 \Rightarrow x^2 - 18x + 103 = 0$$

$$x^2 - 18x + 103 = 0$$

$$x = 10$$

$$x = \frac{46}{3}$$

۸۳ - تبصره - چون طرفین معادله را بقوّه میرسانیم

ممکن است ریشه های اضافی پیدا شود. در مثال فوق  $\frac{46}{3}$  ریشه

اضافی و غیر قابل قبول است.

## xv۱ نامساوی

۸۴- تعریف - اگر دو عبارت با هم مساوی نباشند یکی از دیگری کوچکتر است یا بزرگتر؛ اگر کوچکتر باشد با این علامت  $<$  و اگر بزرگتر است با این علامت  $>$  نمایش میدهند و آنرا نامساوی میگویند.

۸۵- خواص نامساوی

ا- اگر در طرفین نامساوی دو عدد مساوی اضافه یا کم کنیم در نامساوی تغییری حاصل نمی‌شود.

ب- اگر طرفین نامساوی را در عدد مثبتی ضرب یا بر يك عدد مثبت تقسیم کنیم در نامساوی تغییری حاصل نمیشود.

ج- اگر طرفین نامساوی را در يك عدد منفی ضرب یا بر يك عدد منفی تقسیم نمائیم جهت آن تغییر میکند.

د- اگر طرفین نامساوی را بقوه فرد برسانیم در آن تغییری پیدا نمی‌شود.

ه- اگر طرفین يك نامساوی را كه هر دو مثبت باشند بقوه زوج برسانیم در نامساوی تغییری پیدا نمیشود.

و- اگر طرفین يك نامساوی را كه هر دو منفی باشند بقوه زوج برسانیم جهت نامساوی تغییر میکند.

۸۶- نامساوی درجه اولی يك مجهولی پس از اختصار بصورت  $ax > a$  نوشته میشود.

اگر  $a > 0$  باشد جوابهای نامساوی عبارتند از

$$\frac{b}{a} < x < \frac{b}{a} \quad \text{اگر } a < 0$$

$$x < \frac{b}{a} \quad \text{اگر } a > 0$$

$$\frac{b}{a} > x > \frac{b}{a} \quad \text{اگر } a < 0$$

۷۸ - نامساوی درجه دوم  $x^2 - 12x + 18 > 0$  را در  $x = 1$  و  $x = 2$  بررسی کنید.

اولاً، اگر  $x = 1$  باشد،

۱ - در صورتیکه  $x = 1$  باشد نامساوی بازنه می‌شود.

۲ - در صورتیکه  $x = 2$  باشد نامساوی غیر ممکن است.

ثانیاً، اگر  $x = 2$  باشد،

۱ - در صورتیکه  $x = 2$  باشد نامساوی بازنه می‌شود.

مقادیر  $x$  محقق است مگر بازنه  $x = 2$  که صفر می‌شود.

۲ - در صورتیکه  $x = 2$  باشد نامساوی غیر ممکن است.

ثالثاً، اگر  $x = 3$  باشد

۱ - در صورتیکه  $x = 3$  و  $x = 4$  باشند بازنه می‌شود.

کوچکتر از  $x = 3$  یا بزرگتر از  $x = 4$  نامساوی محقق است.

۲ - در صورتیکه  $x = 3$  باشد

نامساوی بازنه می‌شود. پس  $x = 3$  و  $x = 4$  محقق است.

پس  $x = 3$  و  $x = 4$

۸۸ - نامساویهای درجه اول

برای حل نامساویهای درجه اول آن‌ها را به حاصل ضرب

عوامل تجزیه نموده بعداً علامت‌های آن‌ها را پیدا کرده

در جدولی ثبت می‌کنیم و از روی جدول نتیجه معلوم را پیدا می‌کنیم.

مثال - نامساوی ذیل را حل کنید

$$x^3 - 19x^2 + 8x^3 - 1(x^3 - 1)(x^3 - 1)(x^3 - 1)$$

آنرا به حاصل ضرب عوامل تجزیه می‌کنیم:

$$(x - 1)(x - 1)(x - 1)(x - 1)(x - 1)(x - 1)(x - 1)(x - 1)(x - 1)(x - 1)$$

$n$	$\infty$	$+$	$-$	$0$	$1$	$\infty$
$n = 1$		+		+		
$n = 2$		+		+		
$n = 3$		+		+		
$E(n)$		+		+		

ریشه های نامساوی عبارتند از  $1 < n < 3$  و  $3 < n < 4$

۸۹ - نامساوی کسری

برای حل نامساویهای کسری صورت و مخرج را در مخرج

ضرب میکنیم و علامت صورت کسر حاصل را پیدا میکنیم .

### XVII تصاعد حسابی

۹۰ - تعریف - تصاعد حسابی رشته اعدادی است که

تفاضل هر دو جمله یی آن مقدار ثابتی باشد و آن مقدار ثابت را

قدر نسبت تصاعد مینامند .

۹۱ - اگر در تصاعدی، هر جمله از جمله قبل از آن

بزرگتر باشد تصاعد صعودی و الا نزولی است. در حالت اول

قدرنسبت عددی است، مثبت و در حالت دوم عددی منفی است .

۹۲ - اگر در تصاعد حسابی  $a$  جمله اول و  $1$  جمله  $n$ ام

و  $r$  قدرنسبت باشد :

$$1 = a + (n - 1)r$$

ب -  $n$  حاصل جمع  $n$  جمله اول : 
$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

ج - اگر  $d$  واسطه حسابی بین دو جمله متوالی یا تصاعد حسابی درج  $1^o$  قدر نسبت تصاعد درج شده عبارتست از :

$$d = \frac{a_2 - a_1}{1 - 0} = a_2 - a_1$$

۹۳ - در تصاعد حسابی محدود که  $n$  جمله اول زوج باشد مجموع هر دو جمله متساوی البعد از طرفین مقدار ثابت و مساویست یا مجموع دو جمله اول و آخر و اگر  $n$  فرد باشد مقدار جمله وسط مساوی است با واسطه عددی هر دو جمله متساوی البعد از طرفین .

۹۴ - دستهای مختلف :

۱ - حاصل جمع  $n$  عدد متوالی از سلسله اعداد طبیعی که از واحد شروع شود عبارتست از :

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

ب - حاصل جمع  $n$  عدد زوج متوالی در سلسله طبیعی اعداد عبارتست از :

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

ج - مقدار عدد  $n$ ام اعداد فرد از سلسله طبیعی اعداد عبارتست از :

$$1 = 2n - 1$$

د - حاصل جمع  $n$  عدد از اعداد فرد سلسله طبیعی اعداد عبارتست از :

$$S = n^2$$

ه - حاصل جمع مربعات  $n$  عدد متوالی از سلسله طبیعی

اعداد که از واحد شروع شود عبارتست از :

$$S = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

و حاصل جمع مکعبات  $n$  عدد متوالی از سلسله اعداد طبیعی که از واحد شروع شود عبارتست از :

$$S = \frac{n^2(n-1)(n+1)}{4}$$

### XVIII تصاعد هندسی

۹۵- تعریف - تصاعد هندسی رشته اعدادیست که خارج قسمت هر دو جمله پیاپی آن مقدار ثابتی باشد این مقدار ثابت را قدرنسبت تصاعد هندسی گویند .

۹۶- هرگاه هر جمله از تصاعد از جمله قبل از آن بزرگتر باشد تصاعد صعودی و الا نزولی است. در حالت اول قدرنسبت بزرگتر از واحد و در حالت دوم کوچکتر از واحد است .

۹۷- اگر در تصاعدی هندسی  $a$  جمله اول ،  $a$  جمله  $n$  ام و  $l$  قدرنسبت باشد :

ا - مقدار جمله  $n$  ام :  $a_n = a \cdot r^{n-1}$

ب - حاصل جمع جمله  $n$  اول تصاعد :

$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

ج - حاصل ضرب  $n$  جمله اول تصاعد :

$$p = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_n}$$

د - اگر دو واسطه هندسی بین دو جمله متوالی يك تصاعد هندسی درج كنیم  $q^2$  قدر نسبت تصاعد درج شده عبارتست از :

$$q^2 = \frac{q^2 - 1}{\sqrt{q^2 - 1}}$$

ه - حد مجموع جمل يك تصاعد هندسی نزولی وقتیكه  
 عدده جمل بینهایت زیاد شود :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - q}$$

۹۸ - در تصاعد هندسی محدود که عدده جمل زوج باشد حاصل ضرب هر دو جمله متساوی البعد از طرفین مقدار یست ثابت و مساویست با حاصل ضرب دو جمله اول و آخر و اگر عدده جمل فرد باشد مقدار جمله وسط مساوی است با چند حاصل ضرب (واسطه هندسی) هر دو جمله متساوی البعد از طرفین

۹۹ - لگاریتم

۹۹ - تعریف - دو تصاعد نامحدود، یکی هندسی که جمله اولش يك و قدر نسبت آن  $q$  و دومی حسابی که جمله اولش صفر و قدر نسبت آن  $r$  باشد، فرض نموده و آنها را جمله به جمله بطوری زیرهم میشویم که صفر تصاعد حسابی زیر يك از تصاعد هندسی قرار گیرد، باینطریقی :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots : (pm) : \dots : (q^p) : (q) : 1 : (q^{-p}) : \dots : (q^{-pm}) : \dots \\ \dots : mr^p : \dots : r : 0 : r : r^2 : \dots : mr^m : \dots \end{array} \right.$$

دورشته تصاعدی که بطریقی بالا نوشته شده باشند

دستگاه لگاریتم را تشکیل میدهند و در آن هر جمله از تصاعد عددی لگاریتم ( $\log$ ) جمله نظیرش از تصاعد هندسی و هر جمله از تصاعد هندسی عدد ما بازاء یا آنتی لگاریتم جمله نظیرش از تصاعد عددی است؛ مثلاً :

$$21 = 14^{\log 21}$$

$$21 \text{ عدد ما بازاء } = 14^{\log 21}$$

و

۱۰۰ - با توجه باینکه  $10^2 = 100$ ، چون جمله های تصاعد هندسی همیشه مثبت اند پس فقط اعداد مثبت دارای لگاریتم هستند و اعداد کوچکتر از واحد دارای لگاریتم منفی میباشد همچنین  $10^0 = 1$  و  $10^{\infty} = \infty$  و همیشه  $10^1 = 10$  ۱۰۱ - در هر دستگاه لگاریتم عددی را که لگاریتم آن یک است مبنای آن دستگاه مینامند .

۱۰۲ - لگاریتم عدد  $a$  در دستگاهی مبنای  $a$  عددیست مانند  $a^x = a$  که چون مبنای  $a$  را  $a$  به توان  $x$  برابر با  $a$  مساوی  $a$  گردد یعنی :

$$a^{\log_a a} = a$$

$$a^x = a$$

۱۰۳ - اگر  $a > 1$  و  $x$  مثبت باشند همیشه برای  $a$  عددی، که غالباً اصیم خواهد بود، بدست می آید

۱۰۴ - هرگاه  $a > 1$  فرض شود  $a^x$  همیشه و یکنواخت لگاریتم مبنای همیشه مساوی یک است (نمره ۱۰۰)

خواص لگاریتم

۱۰۵ - لگاریتم حاصل ضرب چند عدد مثبت مساوی است



با مجموع لگاریتم‌های آن اعداد :

$$\log abc = \log a + \log b + \log c$$

۱۰۶- لگاریتم خارج قسمت دو عدد مثبت مساوی است با

تفاضل لگاریتم صورت و مخارج :

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

۱۰۷- لگاریتم عکس هر عدد مساویست با لگاریتم آن عدد

با علامت مخالف و آنرا کالگاریتم (Cologarithme) آن عدد نامند یعنی :

$$\log \frac{1}{b} = -\log b = \text{colog } b$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a + \text{colog } b \quad \text{پس}$$

۱۰۸- لگاریتم قوه  $m$ ام هر عدد مساویست با  $m$  برابر

لگاریتم آن :

$$\log a^m = m \log a$$

۱۰۹- لگاریتم ریشه  $m$ ام هر عدد مساویست با  $\frac{1}{m}$  لگاریتم

$$\log \sqrt[m]{a} = \frac{1}{m} \log a$$

آن عدد

لگاریتم اعشاری یا لگاریتم (Vulgaires) :

۱۱۰- دودستگاه لگاریتم اعشاری مینا ده و قدر نسبت

تعباعد عددی يك و قدر نسبت تصاعد هندسی ده میباشد یا بنظر یقی :

$$0.0000000000 : 0.0000000001 : 0.0000000009 : 0.0000000010 : 0.0000000011 : 0.0000000019 : 0.0000000020$$

$$0.0000000000 : 0.0000000001 : 0.0000000009 : 0.0000000010 : 0.0000000011 : 0.0000000019 : 0.0000000020$$

۱۱۱ - لگاریتم اعدادی که محصور بین قوای ۱۰ متوالیه ۱۰ باشند دارای يك جزء صحیح بنام مفسر و يك جزء اعشاری بنام مانتييس می باشد

۱۱۲ - اگر عددی را در یکی از قوای ۱۰ ضرب و یا بر آن تقسیم نمائیم در جزء اعشاری لگاریتم آن تغییری حاصل نمیشود ولی عددی مساوی نماینده آن قوه به مفسر اضافه یا از آن کم میشود :

$$\log(A \cdot 10^m) = \log A + \log 10^m = \log A + m$$

$$\log\left(\frac{A}{10^m}\right) = \log A - \log 10^m = \log A - m$$

۱۱۳ - مفسر لگاریتم هر عدد بزرگتر از واحد عددی است مساوی عدد ارقام صحیح همان عدد منهای يك .

۱۱۴ - چون لگاریتم اعداد کوچکتر از واحد منفی است معمولاً آنرا بطریقی زیر تبدیل به مانتييس مثبت و مفسر منفی مینمایند :

فرض میکنیم  $10^{\log A} = ۱۷۵۲۴۱$  و  $۲ - \log A$  باشد آنرا

بترتیب چنین مینویسیم :

$$\begin{aligned} 10^{\log A} &= ۱۷۵۲۴۱ \quad ۱ - ۱ - ۱ - ۲ = ۱۷۵۲۴۱ \quad ۲ - \log A \\ &= (۱۷۵۲۴۱ - ۱) - (۱ - ۲) = ۲۴۷۵۹ - ۳ \end{aligned}$$

و در موقع نوشتن برای اینکه نمایش دهند فقط مفسر منفی است علامت - را بالای مفسر میگذارند، یا بطریقی :

$$\log A = ۲۴۷۵۹ - ۳$$

تبعاً - کل لگاریتم اعداد را نیز بطریقی بالا تبدیل

بمفسر منفی و مانتیس مثبت می‌نمایند.  
مفسر منفی اعداد کوچکتر از واحد برابر است با  
تعداد صفرهایی که در طرف چپ اولین رقم یا معنای آن عدد  
قرار دارد.

۱۱۵- اگر لگاریتمهای اعداد در دستگاهی بمبنای  $a$  در دست  
باشند و بخواهیم لگاریتمهای آنها را در دستگاهی بمبنای  $b$   
بدست آوریم باید لگاریتمهای آنها را که بمبنای  $a$  است در  
مقدار ثابت  $\log_a b$  (عکس لگاریتم  $b$  در دستگاه بمبنای  $a$ )  
ضرب کنیم ( مقدار ثابت  $\log_a b$  را جدول module گویند )  
چهار عمل اصلی در لگاریتم

۱۱۶- در جمع لگاریتمها مانتیسها را باهم جمع نموده  
و مفسرها را جمع جبری می‌نماییم.

۱۱۷- در تفریق لگاریتمها بجای مفروق کل لگاریتم عدد  
را مینویسیم و عمل تفریق بجمع تبدیل میشود.

۱۱۸- در ضرب عدد صحیح در لگاریتم عدد بزرگتر از يك  
مانند ضرب اعداد اعشاری عمل می‌نماییم.

۱۱۹- برای ضرب عدد در دست در لگاریتم عدد کوچکتر  
از يك چون لگاریتم عدد کوچکتر از يك مرکب از مفسر  
منفی، مانتیس مثبت است عدد در دست را در مانتیس ضرب نموده  
و بین جزء صحیح حاصل با حاصل ضرب آن عدد در مفسر منفی  
جمع جبری بجا می‌آوریم.

۱۲۰- در تقسیم لگاریتم عدد بزرگتر از يك در عدد صحیح  
مانند تقسیم اعداد اعشاری بر عدد صحیح عمل می‌نماییم.

۱۲۱- در تقسیم لگاریتم عدد کوچکتر از يك بر عدد صحیح

لگاریتم ..... صفحه ۷۵

دو حالت اتفاق میافتد .

۱ - مفسر منفی یثنهائی بر مقسوم علیه قابل قسمت است، در اینصورت مفسر ومانتیس را جدا جدا بر مقسوم علیه تقسیم نموده خارج قسمت را بصورت لگاریتم عدد کوچکتر از يك میزنویسیم .

$$\begin{array}{r} \text{مثال: } 74644 \div 4 = 18106 \text{ ر } 2 \\ \underline{4} \phantom{000000} \\ 74644 \\ \underline{40000} \phantom{00} \\ 34644 \\ \underline{32000} \phantom{00} \\ 2644 \\ \underline{2000} \phantom{00} \\ 644 \\ \underline{600} \phantom{00} \\ 44 \end{array}$$

۲ - مفسر منفی به تنهائی بر مقسوم علیه قابل قسمت نیست، در اینحال آنقدر واحد منفی بمفسر منفی می افزائیم تا قابل قسمت شود و بهمین اندازه هم واحد مثبت بمانتیس مثبت اضافه میکنیم تا در لگاریتم تغییری حاصل نگردد بعد مانند حالت قبل عمل مینمائیم :

$$\begin{array}{r} \text{مثال: } 74645 \div 4 = 18106 \text{ ر } 1 \\ \underline{4} \phantom{000000} \\ 74645 \\ \underline{40000} \phantom{00} \\ 34645 \\ \underline{32000} \phantom{00} \\ 2645 \\ \underline{2000} \phantom{00} \\ 645 \\ \underline{600} \phantom{00} \\ 45 \end{array}$$

۱۲۲ - در تقسیم لگاریتم بر لگاریتم نیز دو حالت اتفاق میافتد :

۱ - اگر مقسوم و مقسوم علیه هر دو لگاریتم مثبت باشند

تقسیم دو عدد اعشاری عمل مینمائیم .

۲ - اگر مقسوم و مقسوم علیه یا یکی از آنها منفی است به جای آن کل لگاریتم میگذاریم و مانند حالت قبل عمل مینمائیم .

## جدولهای لگاریتم

۱۲۳ - جدولهای لگاریتم جدولهایی است که یکمات آنها میتوان لگاریتمهای اعداد را بدست آورد ، یا عددهائی را که لگاریتمهایان در دست است پیدا نمود . چون تعیین مفسر لگاریتم آسان است در جدول فقط مانتیس لگاریتم اعداد را ثبت کرده اند .

۱۲۴ - جدولهای لگاریتم بر دو قسم اند :

۱ - جدولهای بزرگ که در آنها لگاریتم اعداد تا هفت رقم اعشار داده شده است .

۲ - جدولهای کوچک که در آنها لگاریتم اعداد از ۱ تا ۱۰۰۰ با پنج رقم اعشار نوشته شده است .

در محاسبات عادی میتوان از جدولهای کوچک استفاده نمود و نتیجه محاسبه را با تقریب کافی بدست آورد از جدولهای کوچک که بیشتر مورد استفاده دانش آموزان است . جدول دویوقی است که ترجمه فارسی آن نیز از طرف وزارت فرهنگ چاپ شده . طرز استفاده از جدول در هر یک از آنها نوشته شده است .

۱۲۵ - مادر جدول صفحه ۷۷ مانتیس لگاریتم عددهای از ۱ تا ۱۰۰ را درج میکنیم \*

لگاریتم

لگاریتم	عدد	لگاریتم	عدد	لگاریتم	عدد	لگاریتم	عدد
۹۰۸۴۹	۸	۲۲۲۲۲	۲	۸۰۷۲۸	۳	۲۲۲۲۲	۲
۹۱۳۸۱	۲	۲۲۳۴۲	۴	۸۱۲۶۰	۴	۲۲۳۴۲	۴
۹۱۹۰۸	۴	۲۲۴۵۷	۵	۸۱۷۹۳	۵	۲۲۴۵۷	۵
۹۲۴۲۸	۵	۲۲۵۷۲	۶	۸۲۳۲۶	۶	۲۲۵۷۲	۶
۹۲۹۵۰	۶	۲۲۶۸۷	۷	۸۲۸۵۹	۷	۲۲۶۸۷	۷
۹۳۴۷۲	۷	۲۲۸۰۲	۸	۸۳۳۹۲	۸	۲۲۸۰۲	۸
۹۴۰۰۰	۸	۲۲۹۱۷	۹	۸۳۹۲۵	۹	۲۲۹۱۷	۹
۹۴۵۲۸	۹	۲۳۰۳۲	۱۰	۸۴۴۵۸	۱۰	۲۳۰۳۲	۱۰
۹۵۰۵۷	۱۰	۲۳۱۴۷	۱۱	۸۴۹۹۱	۱۱	۲۳۱۴۷	۱۱
۹۵۵۸۵	۱۱	۲۳۲۶۲	۱۲	۸۵۵۲۴	۱۲	۲۳۲۶۲	۱۲
۹۶۱۱۳	۱۲	۲۳۳۷۷	۱۳	۸۶۰۵۷	۱۳	۲۳۳۷۷	۱۳
۹۶۶۴۱	۱۳	۲۳۴۹۲	۱۴	۸۶۵۹۰	۱۴	۲۳۴۹۲	۱۴
۹۷۱۶۹	۱۴	۲۳۶۰۷	۱۵	۸۷۱۲۳	۱۵	۲۳۶۰۷	۱۵
۹۷۶۹۷	۱۵	۲۳۷۲۲	۱۶	۸۷۶۵۶	۱۶	۲۳۷۲۲	۱۶
۹۸۲۲۵	۱۶	۲۳۸۳۷	۱۷	۸۸۱۸۹	۱۷	۲۳۸۳۷	۱۷
۹۸۷۵۳	۱۷	۲۳۹۵۲	۱۸	۸۸۷۲۲	۱۸	۲۳۹۵۲	۱۸
۹۹۲۸۱	۱۸	۲۴۰۶۷	۱۹	۸۹۲۵۵	۱۹	۲۴۰۶۷	۱۹
۹۹۸۰۹	۱۹	۲۴۱۸۲	۲۰	۸۹۷۸۸	۲۰	۲۴۱۸۲	۲۰
۱۰۰۰۰	۲۰	۲۴۲۹۷	۲۱	۹۰۳۲۱	۲۱	۲۴۲۹۷	۲۱
۱۰۰۰۰	۲۱	۲۴۴۱۲	۲۲	۹۰۸۵۴	۲۲	۲۴۴۱۲	۲۲
۱۰۰۰۰	۲۲	۲۴۵۲۷	۲۳	۹۱۳۸۷	۲۳	۲۴۵۲۷	۲۳
۱۰۰۰۰	۲۳	۲۴۶۴۲	۲۴	۹۱۹۲۰	۲۴	۲۴۶۴۲	۲۴
۱۰۰۰۰	۲۴	۲۴۷۵۷	۲۵	۹۲۴۵۳	۲۵	۲۴۷۵۷	۲۵
۱۰۰۰۰	۲۵	۲۴۸۷۲	۲۶	۹۲۹۸۶	۲۶	۲۴۸۷۲	۲۶
۱۰۰۰۰	۲۶	۲۴۹۸۷	۲۷	۹۳۵۱۹	۲۷	۲۴۹۸۷	۲۷
۱۰۰۰۰	۲۷	۲۵۱۰۲	۲۸	۹۴۰۵۲	۲۸	۲۵۱۰۲	۲۸
۱۰۰۰۰	۲۸	۲۵۲۱۷	۲۹	۹۴۵۸۵	۲۹	۲۵۲۱۷	۲۹
۱۰۰۰۰	۲۹	۲۵۳۳۲	۳۰	۹۵۱۱۸	۳۰	۲۵۳۳۲	۳۰
۱۰۰۰۰	۳۰	۲۵۴۴۷	۳۱	۹۵۶۵۱	۳۱	۲۵۴۴۷	۳۱
۱۰۰۰۰	۳۱	۲۵۵۶۲	۳۲	۹۶۱۸۴	۳۲	۲۵۵۶۲	۳۲
۱۰۰۰۰	۳۲	۲۵۶۷۷	۳۳	۹۶۷۱۷	۳۳	۲۵۶۷۷	۳۳
۱۰۰۰۰	۳۳	۲۵۷۹۲	۳۴	۹۷۲۵۰	۳۴	۲۵۷۹۲	۳۴
۱۰۰۰۰	۳۴	۲۵۹۰۷	۳۵	۹۷۷۸۳	۳۵	۲۵۹۰۷	۳۵
۱۰۰۰۰	۳۵	۲۶۰۲۲	۳۶	۹۸۳۱۶	۳۶	۲۶۰۲۲	۳۶
۱۰۰۰۰	۳۶	۲۶۱۳۷	۳۷	۹۸۸۴۹	۳۷	۲۶۱۳۷	۳۷
۱۰۰۰۰	۳۷	۲۶۲۵۲	۳۸	۹۹۳۸۲	۳۸	۲۶۲۵۲	۳۸
۱۰۰۰۰	۳۸	۲۶۳۶۷	۳۹	۹۹۹۱۵	۳۹	۲۶۳۶۷	۳۹
۱۰۰۰۰	۳۹	۲۶۴۸۲	۴۰	۱۰۰۰۰	۴۰	۲۶۴۸۲	۴۰

۱۰۰۰۰

۱۰۰۰۰

## XX - ربح مرکب

۱۲۶ - **تهرینک** - اگر مبلغی را با نرخ معینی به‌را بعه بگذاریم و در آخر هر سال سود آنرا به سرمایه افزوده سرمایه سال بعد قرار دهیم گوئیم آن مبلغ بر ربح « مرکب » داده شده است.

۱۲۷ - در ربح مرکب معمولاً نرخ عبارتست از سودی که ریال در یک سال.

۱۲۸ - اگر  $a$  سرمایه و  $r$  نرخ و  $A$  مجموع سرمایه و سود پس از  $n$  سال باشد:

$$A = a(1+r)^n \quad (۱)$$

$$\log A = \log a + n \log(1+r) \quad (۲)$$

از فورمول (۲) میتوان فورمولهای زیر را بدست آورد:

$$۱) \quad \log a = \log A - n \log(1+r)$$

$$۲) \quad n = \frac{\log A - \log a}{\log(1+r)}$$

$$۳) \quad \log(1+r) = \frac{\log A - \log a}{n}$$

فورمول (۲) در مواردیکه مدت صحیح یا کسری باشد استعمال میشود.

## XXI - قسط السنین

۱۲۹ - **تهرینک** - قسط السنه مبلغ پولی است که کسی برای تشکیل سرمایه یا پرداخت قرض مرتباً در اول یا آخر هر

سال در مدت چند سال میپردازد .

۱۳۰ - قسط‌السنین برای تشکیل سرمایه

فرض میکنیم  $n$  ریال مبلغی باشد که در اول هر سال پرداخته میشود و  $r$  سود سالانه یکریال در یکسال و  $A$  ریال مبلغ آخری که در آخر سال  $n$  ام بدست میآید باشد در اینصورت :

$$A = a(1+r) \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$a = \frac{Ar}{1+r} \cdot \frac{1}{(1+r)^n - 1}$$

۱۳۱ - قسط‌السنین - محاسبه  $r$  یا  $n$  از روی سه عامل معلوم دیگر بتقریب بکمات جدولهای عددی مخصوص بدست میآید .

۱۳۲ - قسط‌السنین برای استهلاک

- اگر  $A$  ریال مبلغ دریافتی و  $a$  ریال مبلغ قسط پرداختی در آخر هر سال و  $n$  عدد اقساط و  $r$  سود سالانه یک ریال باشد .

$$a = Ar \cdot \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

مبلغ استهلاک  $\alpha_1$  در آخر سال اول عبارت خواهد بود  
 $A - a = \alpha_1$  و مبلغ استهلاک  $\alpha_p$  و در آخر سال  $p$  ام عبارتست از :

$$\alpha_p = (A - a)(1+r)^{p-1} = \alpha_1(1+r)^{p-1}$$



## XXII نمایش هندسی

۱۳۳ - تعریف - برای اینکه نقطه  $N$  را بموازات امتداد  $\triangle$  بر خط  $DA$  تصویر کنیم از  $M$  خطی موازی  $\triangle$  میکشیم تا  $D$  را قطع کند. تصویر نقطه  $N$  بموازات صفحه  $DA$  بر خط  $\triangle$  محل تلاقی  $\triangle$  با صفحه ایست که از  $N$  بموازات  $DA$  رسم شود.

۱۳۴ محور - مبدأ - مختصات - هرگاه از روی خط نامحدود  $xx'$  جهتی مثلا از چپ بر راست، را مثبت اختیار کنیم آن خط تشکیل یک محور میدهد. نقطه ثابت  $(O)$  واقع بر محور را که نقاط دیگر محور بوسیله فاصله شان از آن مشخص میگرددند مبدأ میگویند.

خطی را که از مبدأ بیك نقطه غیر واقع بر محور وصل کنند شعاع حامل آن نقطه نامند،

برای معین ساختن جای هر نقطه بر روی خط، صفحه یا فضا مشخصاتی لازمست که آنها را مختصات گویند.

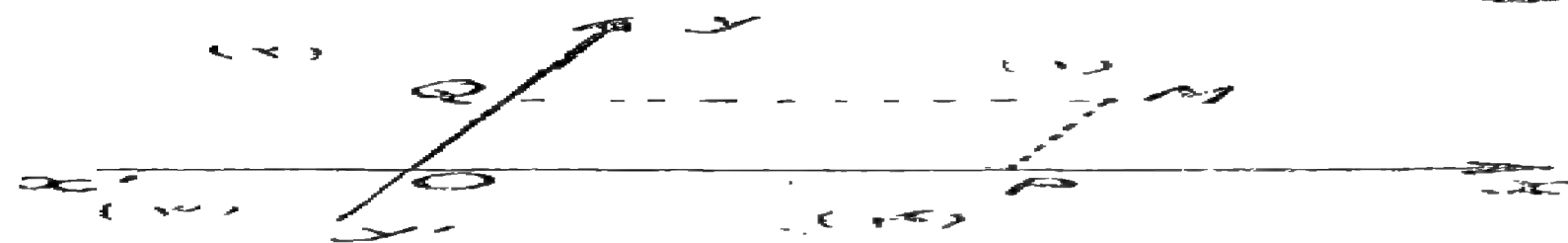
فاصله هر نقطه واقع بر محور را از مبدأ  $O$  یا  $O'$  آن نقطه نامند. طول نقطه برای مشخص ساختن هر نقطه واقع بر محور کافیست.

هر نقطه صفحه ممکن است بوسیله تصاویری بر دو محور متقاطع (مختصات دکارتی) یا بكمات طول شعاع حامل و زاویه این شعاع با محور (مختصات قطبی) مشخص شود.

هر نقطه در فضا بوسیله تصاویری بر سه محور متقاربت غیر واقع در يك صفحه (مختصات دکارتی) یا با شعاع حامل و زاویه

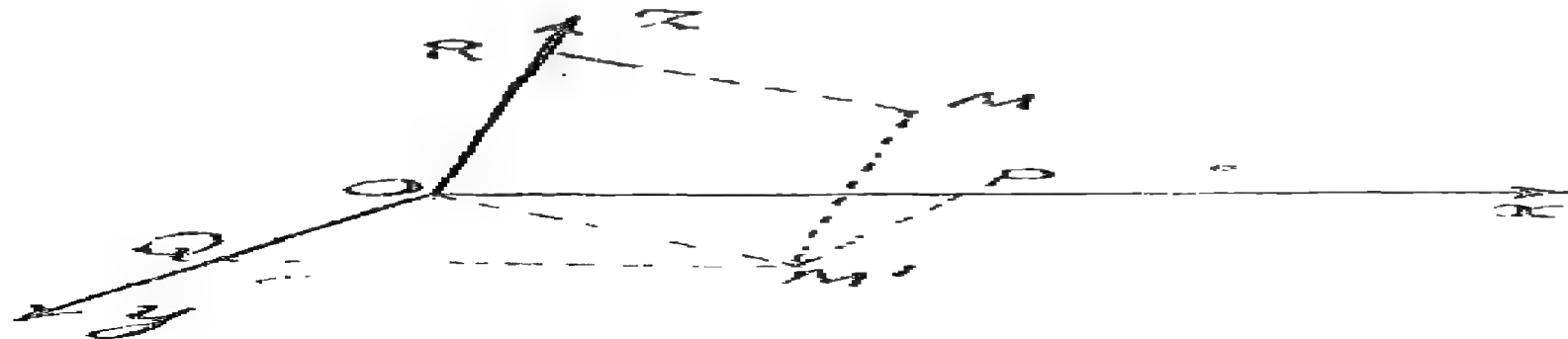
این شعاع یا يك صفحه كه بر مبدأ میگذرد و زاویه تصویر شعاع حاصل بر روی این صفحه با معرری كه بر مبدأ مرور نماید (مختصات قطبی) معین میگردد .

۱۳۵- مختصات دکارتی - (در صفحه دو محور



شکل ۱

دو محور نا محدود  $Ox$  و  $Oy$ ، صفحه را به چهار ناحیه تقسیم میکنند (ش ۱) در ناحیه ۱ هر دو مختص مثبت، در ناحیه ۲ طول منفی و عرض مثبت، در ناحیه ۳ هر دو منفی و در ناحیه ۴ طول مثبت و عرض منفی میباشد.



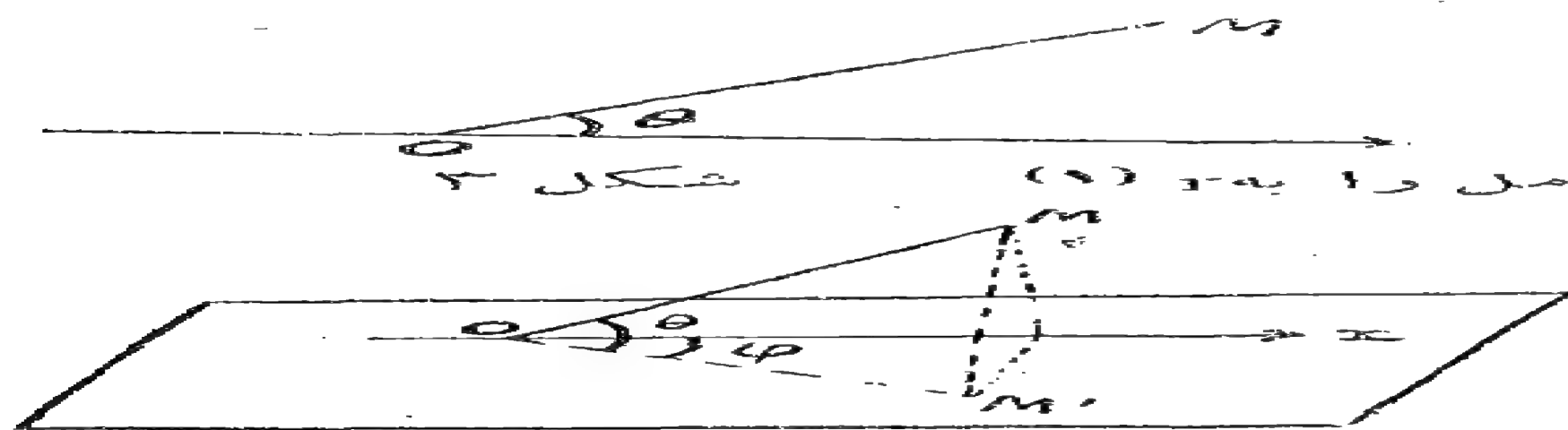
شکل ۲

ارتفاع (بلندی یا Cote) نقطه  $M$  میگویند .  
تصویر - معمولاً محورها را عمود برهم اختیار

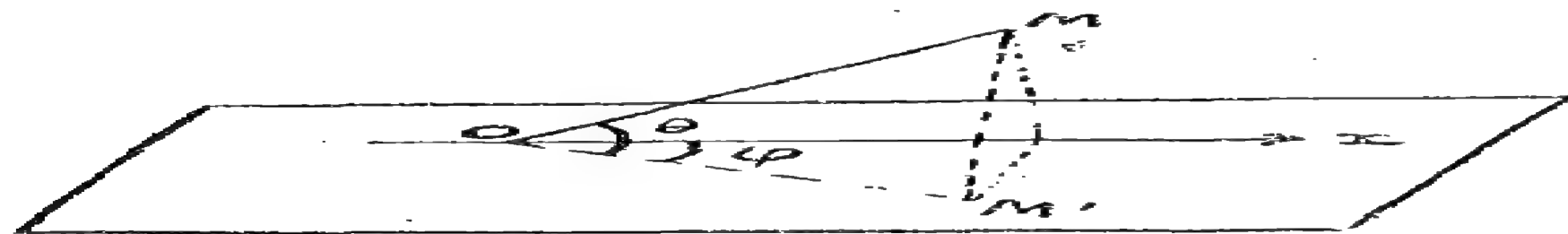
مقاطع  $Ox$ ،  $Oy$  اختیار میکنیم و نقطه  $M$  را بموازات  $Ox$  بر  $Oy$  و بموازات  $Oy$  بر  $Ox$  تصویر میکنیم تا  $P$  و  $Q$  بدست آید .  
 $OP$  را طول یا  $T$  میسوی و  $OQ$  را عرض یا (Ordonnée) نقطه  $M$  میگویند .

۲) درفضا - نقطه  $M$  را بر هر يك از سه محور متقارب  $Ox$ ،  $Oy$ ،  $Oz$  به موازات صفحه‌ای كه بر دو محور دیگر میگذرد تصویر میکنیم تا  $P$  و  $Q$  و  $R$  بدست آید (ش ۲) و  $OP$  و  $OQ$  و  $OR$  را بترتیب طول و عرض و

میکنند و مختصات را قائلیم مینامند .  
 ما از این پس فقط از مختصات دکارتی قائم صحت نخواهیم کرد .  
 قرار دادیم در خواندن مختصات ابتدا طول ، بعد عرض  
 و بعد از آن ارتفاع نقطه را میخوانیم و بهمین ترتیب از چپ  
 بر است میخوانیم :  $M(x, y, z)$



شکل ۳



شکل ۴

زاویه  $MOM'$  را  $\theta$  و زاویه  $M'Ox$  را  $\phi$  مینامیم .  
 $OM = r$  و  $O$  و  $P$  مختصات قطبی نقطه  $M$  هستند (ش ۴)

۱۲۳۷ - پشتگی بین مختصات قطبی و مختصات  
 قائم (۱ - ۱) در صفحه - (ش ۵)

(۱) - شعاع حاصل را با حرف یونانی (رو) نمایش میدهند  
 و در شکل هم همان حرف نوشته شده ولی چون در جایگاه  $T$  حرف  
 موجود نبود در متن بجای آن  $r$  گذاشته شده است

### مختصات کروی

$$\begin{cases} OP = x = r \cos \theta \\ OQ = y = r \sin \theta \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ y = 0 \end{cases} \end{cases}$$

۲ - در فضا (ش ۶)

$$\begin{cases} ON' = OM \cos \theta = r \cos \theta \\ \begin{cases} x = OP = r \cos \theta \cos \varphi \\ y = OQ = r \cos \theta \sin \varphi \\ z = OR = r \sin \theta \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ \frac{y}{x} = \tan \varphi \\ \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \tan \theta \end{cases} \end{cases}$$

۱۳۸ - مختصات کروی -

رجوع شود به قسمت هیت.

۱۳۹ - تغییر محاورهای مختصات - ۱) انتقال

محاورها - هر گاه محاورهای

مختصات  $Ox$  و  $Oy$  را به موازات

خود حرکت دهیم تا بوضع  $O'x'$  و  $O'y'$

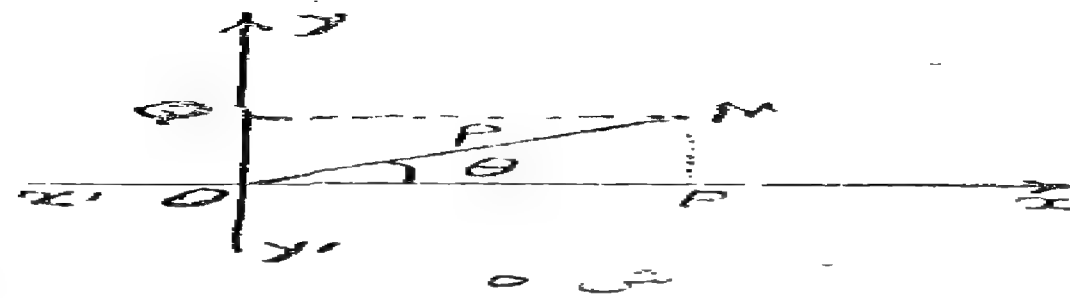
در آیند (ش ۷) و مختصات نقطه  $M$

را نسبت به دو محور اول  $x$  و  $y$  و

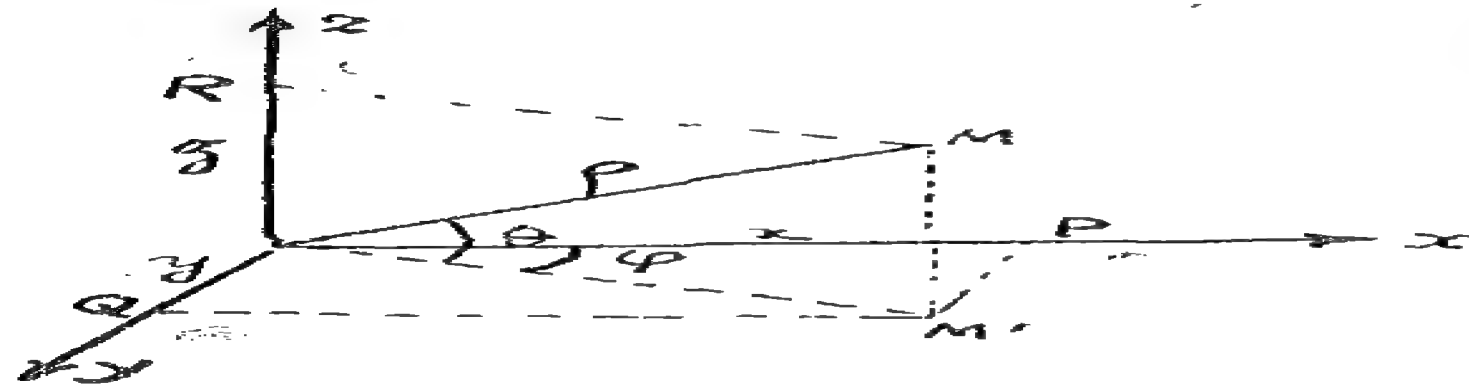
نسبت به محاورهای دوم  $x'$  و  $y'$  انگاشته

و مختصات نقطه  $M'$  را  $\alpha$  و  $\beta$  بنامیم

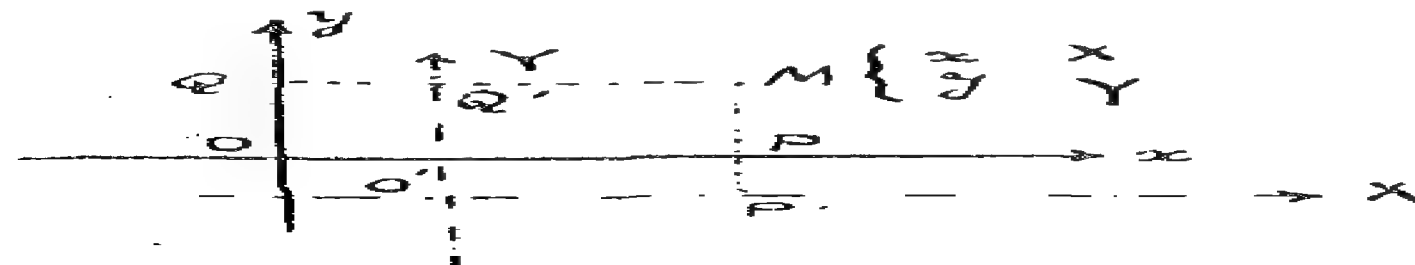
۸۲



ش ۵



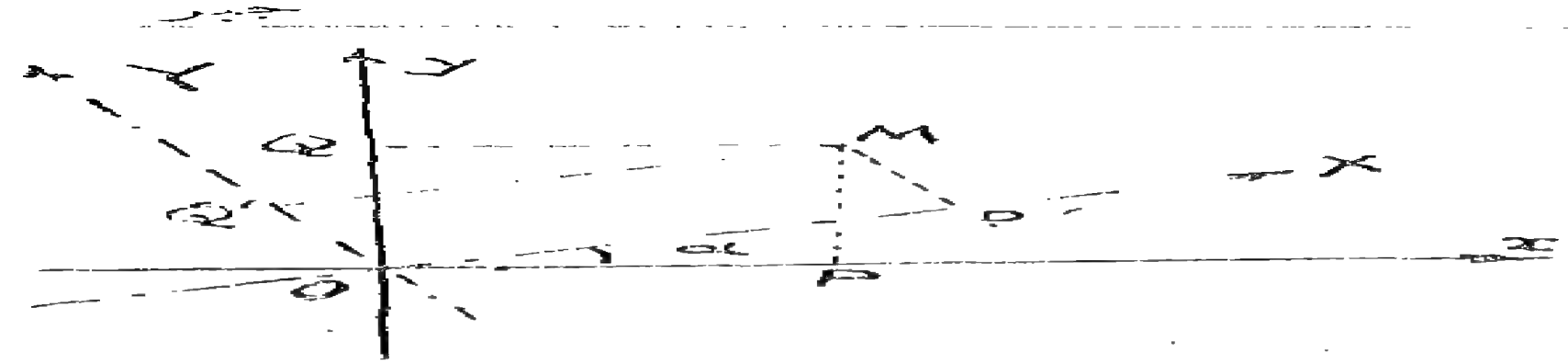
ش ۶



شکل ۷

$$\begin{cases} X' = X - \alpha \\ Y' = Y - \beta \end{cases} \quad \begin{cases} X' = X + \alpha \\ Y' = Y + \beta \end{cases}$$

(۲) دوران محورهاها  
اگر محورهاهای  $Ox$  و  
 $Oy$  بهدای دوران بی اندازه  
زاویه  $\varphi$  بوضع  $Ox'$  و



شکل ۸

$Ox'$  در آیند (ش ۸) و مختصات یک نقطه  $M$  را نسبت با اولیها  
 $x$  و  $y$  و نسبت بدومیها  $x'$  و  $y'$  بنامیم، از تصویر کردن دایره  
چندبر (کثیرالاضلاع)  $OPNT$  بر روی محور مقنطی چنین  
خواهیم داشت:

$I^2 M^2 + I^2 P^2 = MP^2$  تصویر  $I^2 M^2 + I^2 P^2 = MP^2$  تصویر

$$\begin{aligned} x'^2 &= x^2 \cos^2 \varphi + y^2 \sin^2 \varphi \\ y'^2 &= x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi \end{aligned}$$

یعنی:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{aligned}$$

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$$

و

۱-۴۰ - طول قطعه خط  $(1 - 1)$  درازی هر قطعه خط که  
بر محوری قرار داشته باشد برابر است با طول مشتها منتهای  
طول مبداء آن .  
۲ - اگر مبداء قطعه خطی نقطه  $(x_0, y_0)$  و  $(x_1, y_1)$  و  
منتهای آن نقطه  $(x_2, y_2)$  باشد:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

۱۴۱ - تقسیم نقطه خط به نسبت  $k$

هر گاه نقطه  $M(x, y, z)$  قطعه خط  $AB$  را که مختصات دو انتهای آن  $A(x_1, y_1, z_1)$  و  $B(x_2, y_2, z_2)$  باشند به نسبت  $k$  تقسیم نماید، یعنی  $k = \frac{AM}{MB}$  باشد :

$$M \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{kx_2 + x_1}{k+1} \\ y = \frac{ky_2 + y_1}{k+1} \\ z = \frac{kz_2 + z_1}{k+1} \end{array} \right.$$

۱۴۲ - تبدیل  $(1)$  اگر  $M$  وسط  $AB$  باشد  $k=1$  پس مختصات وسط قطعه خط و اسطه عددی مختصات مبدأ و منتهای قطعه اند .  
(۲) مختصات مرکز ثقل مثلث مساوی  $\frac{1}{3}$  مجموع مختصات سه رأس آن است .

۱۴۳ - روابط مهم :

الف - رابطه شال Chasle

۱ - اگر سه نقطه  $A$  و  $B$  و  $C$  بر روی یک محور باشند :

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = 0$$

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$$

۲ - اگر  $n$  نقطه  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $\dots$  و  $K$  و  $L$  و  $M$  بر روی يك محور باشند :

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \dots + \vec{KL} + \vec{LA} = 0$$

$$\vec{AL} = \vec{AB} + \vec{BC} + \dots + \vec{KL}$$

یا

ب - رابطه فیثاغورث

اگر دو نقطه  $A$  و  $B$  بطولهای  $a$  و  $b$  بر روی محدودی واقع باشند و  $M$  وسط  $AB$  باشد ( شماره ۴۵ )

$$OM^2 = AM^2 = OA \times OB$$

ج - رابطه اولر

اگر سه نقطه  $A$  و  $B$  و  $C$  بطولهای  $a$  و  $b$  و  $c$  بر روی محوری فرض شوند ( شماره ۴۶ )

$$OA \cdot BC + OB \cdot CA + OC \cdot AB = 0$$

د - رابطه استوارت

اگر سه نقطه  $A$  و  $B$  و  $C$  بطولهای  $a$  و  $b$  و  $c$  بر روی محوری فرض شوند ( شماره ۴۷ )

$$OA^2 \cdot BC + OB^2 \cdot CA + OC^2 \cdot AB + BC \cdot CA \cdot AB = 0$$

ه - اگر نقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  بطولهای  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  و  $e$  محور  $OX$  را بر نسبت توافقی تقسیم نموده باشند :

$$1 = (a+b)(c+d) = (a+b)(c+d) = 1$$

۲ - اگر  $O$  وسط  $AB$  فرض شود :  $a = b$  و  $c = d$

$$a^2 = cd$$

۳ — اگر (۸) بردوی ۸ فرض شود :

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

### XXXIII — متغیر و تابع

- ۱۴۴ — هر چیز تغییر پذیر را متغیر گویند .
- ۱۴۵ — تابع — اگر ما بین دو متغیر رابطه ای موجود باشد بطوریکه تغییر یکی بستگی بتغییر دیگری داشته باشد دومی را متغیر اصلی و اولی را متغیر تابع یا تابع میگویند . در بیان رابطه دو متغیر هر یک را میتوان بدون تفاوت تابع دیگری دانست .
- تابع باینصورت نمایش داده میشود :  $y = f(x)$
- ۱۴۶ — هر یک از  $x$  یا  $y$  را تابع  $x$  نامند .
- ۱۴۷ — تابع  $y$  را تابع  $x$  نامند .
- ۱۴۸ — تابع  $y = f(x)$  را  $y$  یا  $f(x)$  نامند .
- ۱۴۹ — تابع  $y = f(x)$  را  $y$  یا  $f(x)$  نامند .



بازاء  $x = a$  انفصالی گویند اگر  $f(a)$  مقدار معینی نباشد .  
توضیح - توابع معین همیشه انفصالی هستند و توابع نامعین بازاء مقادیری از متغیر که تابع نامعین است انفصالی میباشند .

۱۵۰ — تابع صعودی - تابع را صعودی گویند اگر تابع و متغیر با هم بالا و پائین بروند . مثلاً قیمت پارچه تابع صعودی طول آنست .

۱۵۱ — تابع نزولی - تابع را نزولی گویند وقتی که جهت تغییرات تابع و متغیر مخالف باشد مثلاً مدت لازم برای ساختمان یک بنا تابع نزولی تعداد کارگران است که یک کار گمارده میشوند .

۱۵۲ — تابع تناوبی - اگر بازاء مقادیر متعددی از متغیر که تفاضل هر دو مقدار متوالی آنها مقدار ثابتی باشد تابع یک مقدار را از نماید این تفاضل ثابت را دوره تناوب گویند .  
مثلاً  $y = \sin x$  تابع متناوبی است که  $2\pi$  دوره تناوب آنست .

#### XXIV - حدود

۱۵۳ - هر گاه متغیری حین تغییر بعدد معینی نزدیک شده ولی هیچگاه مساوی آن نگردد آن عدد را حد متغیر گویند . اگر متغیر از حد کوچکتر باشد حد را فوقانی و گرنه تحتانی نامند .  
مثال : محیط دایره حد فوقانی محیط کثیر الاضلاع محیطی و حد تحتانی محیط کثیر الاضلاع محیطی است وقتی عدد اضلاع آنها

بی نهایت زیاد شود. عبارت دیگر عدد  $m$  حد متغیر  $x$  است در صورتیکه قدرمطلق  $(m - x)$  از هر عدد مثبت کوچکی کوچکتر شود و وقتی که  $x$  بینهایت به  $m$  نزدیک گردد.

### ۱۵۴ - خواص حدود

- ۱ - حد مجموع جبری چند تابع از متغیر  $x$  وقتی که به سمت حدی میل نمایند مساوی است با مجموع حدود آنها.
- ۲ - حد حاصل ضرب چند تابع از متغیر  $x$  وقتی که به سمت حدی میل نمایند مساوی است با حاصلضرب حدود آنها.
- ۳ - حد خارج قسمت دو تابع از متغیر  $x$  وقتی که به سمت حدی میل نمایند مساوی است با خارج قسمت حدود آنها بشرط آنکه حد تابع مقسوم علیه مخالف صفر باشد.
- ۴ - حد  $n$ ام (یا ریشه  $n$ ام) یک تابع مساوی است با  $n$ ام (یا ریشه  $n$ ام) حد آن تابع.
- ۵ - حد کثیرالاجمله صحیحی از  $n$  بازاهاست  $||$  مساوی است با  $n$  و علامتش علامت جمله ایست که بزرگترین نماینده را دارا باشد.

### ۷-۷ - رفع ابهام

- ۱۵۵ - تعریف - اگر تابعی بازا مقدار معینی از متغیر بیک از صورتهای  $\frac{0}{0}$ ،  $\frac{\infty}{\infty}$ ،  $\frac{0}{\infty}$  یا  $\frac{\infty}{0}$  در آید گویند تابع بازا آن مقدار مبهم است و پیدا کردن مقدار حقیقی تابع را بازا آن مقدار رفع ابهام گویند.
- ۱۵۶ - رفع ابهام-۱) صورت  $\frac{0}{0}$  در موقعی پیدا می

شود که صورت و مخرج تابع  $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$  دارای ریشه مشترک  $a$  باشند، و برای رفع ابهام باید عامل مشترك  $a - x$  را هر چند دفعه که ممکن باشد از صورت و مخرج حذف نمود.

(۲)  $-\infty < x < \infty$  را میتوان بصورت  $\frac{1}{x}$  یا  $\frac{1}{x^2}$  نوشت.

(۳)  $-\infty$  را میتوان بصورت  $\frac{1}{x}$  یا  $\frac{1}{x^2}$  نوشت.

(۴) صورت  $(\infty - \infty)$  اگر در تابع  $\frac{f(x) - \varphi(x)}{\varphi(x)}$ ،  $f(x) = \infty$  و  $\varphi(x) = \infty$  باشد، دراد  $\frac{f(x) - \varphi(x)}{\varphi(x)}$  ضرب میکنیم تا بصورت  $\frac{f(x) + \varphi(x)}{f(x) + \varphi(x)}$  درآید بعد صورت و مخرج را بر  $\varphi^2(x)$  تقسیم می نمائیم تا بشود:

$$\frac{\frac{f(x)}{\varphi^2(x)} + \frac{\varphi(x)}{\varphi^2(x)}}{\frac{f(x)\varphi^2(x) + \varphi(x)\varphi^2(x)}{\varphi^4(x)}}$$

این کسر باقاعده  $x = a$  مساوی  $\frac{0}{0}$  است.

۱۵۷ — نتیجه — مقدار حقیقی کسر  $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$  در بازه

- ۱ — اگر درجه صورت از مخرج بزرگتر باشد ،  
 $\infty \pm$  است .
- ۲ — اگر درجه صورت مساوی درجه مخرج باشد  
 مساوی است با خارج قسمت ضرایب جملی که دارای بزرگترین  
 نما هستند .
- ۳ — اگر درجه صورت از مخرج کوچکتر باشد مساوی  
 صفر است .

### ۷۱ - مشتقات

- ۱۵۸ — تعریف - اگر متغیر  $x$  از مقدار  $x_0$  تا مقدار  
 $x_1$  تغییر کند میگویند با اندازه  $(x_1 - x_0)$  نمو کرده است  
 و این نمو را با علامت  $\Delta x$  نشان میدهند .  
 در تابع  $(x)$   $y = f(x)$  با ذاء هر نمو  $\Delta x$  تابع نموی مانند  
 $\Delta y$  خواهد داشت .
- ۱۵۹ — تعریف - مشتق تابع  $(x)$   $f(x)$  عبارتست  
 از حد  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  وقتی که  $\Delta x$  میل کند به سمت صفر .  
 مشتق تابع  $(x)$   $f(x)$  را به  $y'$  یا  $\frac{dy}{dx}$  یا  $\frac{d}{dx} f(x)$  نمایش  
 میدهند .
- ۱۶۰ — مشتقات متوالی - چون مشتق هر تابع خود  
 تابعی از متغیر میباشد ممکن است از آنهم مشتق گرفت . این

مشتق را مشتق دوم تابع اصلی گویند . به همین طریق ممکن است مشتق سوم و چهارم و . . . و  $n$ ام گرفت .

۱۶۱ — مشتق تابع تابع — در تابع تابع  $(u)$  اگر  $y = \varphi(x)$  ممکن است مشتق  $y$  را بر حسب  $u$  یا بر حسب  $x$  بدست آورد و بین آنها این رابطه برقرار است :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = y'_u \cdot u'_x$$

۱۶۲ — محاسبه مشتق و خواص آن

۱ — مشتق مقادیر ثابت صفر است .

۲ — مشتق مجموع چند تابع :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = u + v = w \\ y' = u' + v' = w' \end{array} \right.$$

۳ — مشتق حاصلضرب چند تابع :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = u \cdot v \\ y' = u'v + v'u' \\ y = u \cdot v \cdot w \\ y' = u'vw + v'u'w + w'u'v \end{array} \right.$$

۴ — مشتق خارج قسمت دو تابع :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{u}{v} \\ y' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \end{array} \right.$$

۵ — مشتق قوه  $n$ ام يك تابع

$$\left\{ \begin{aligned} y &= u^m \\ y' &= mu u^{m-1} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} y &= m \sqrt[m]{u^n} \\ y' &= \frac{n}{m} u^{\frac{1}{m}-1} \times m \sqrt[m]{u^n} \end{aligned} \right. \quad \text{۶ - مشتق ریشه m ام یات تابع}$$

### ۱۶۳ - مشتق توابع متداول

$$\left\{ \begin{aligned} 1 &- y' = c \\ 1 &- y' = x \\ \frac{1}{n} &- y' = x^n \\ \frac{1}{n} &- y' = ax^n \\ 0 &- y' = \frac{1}{x} \\ \frac{1}{m} &- y' = \frac{x^m}{x^m+1} \\ \frac{1}{2} &- y' = \sqrt{x} \\ \frac{1}{2} &- y' = \sqrt[n]{x} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} y' &= c \\ y' &= 1 \\ y' &= mx^{n-1} \\ y' &= amx^{n-1} \\ y' &= \frac{1}{x^2} \\ y' &= \frac{am}{x^{m+1}} \\ y' &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ y' &= \frac{1}{m\sqrt[n]{x^{n-1}}} \end{aligned} \right.$$

مشتق توابع مستدیره :

$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$
$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$
$y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$
$y = \operatorname{tg} u$	$y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$y = \sin^2 x$	$y' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$
$y = \cos^2 x$	$y' = -2 \cos x \sin x = -\sin 2x$
$y = \sin(mx + a)$	$y' = m \cos(mx + a)$
$y = \cos(mx + a)$	$y' = -m \sin(mx + a)$
$y = \operatorname{tg}(mx + a)$	$y' = \frac{m}{\cos^2(mx + a)}$
$y = \operatorname{ctg}(mx + a)$	$y' = -\frac{m}{\sin^2(mx + a)}$
$y = \operatorname{arc} \sin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{arc} \cos x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$۲۴ - y = \arctg x$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$۲۵ - y = \operatorname{arccotg} x$$

$$y' = \frac{-1}{1+x^2}$$

خواص مشتق

۱۶۴ - مشتق تابع صعودی مثبت و مشتق تابع نزولی منفی است .

۱۶۵ - مشتق تابع بازاء طول نقاط ماکزیمم و مینیمم صفر است .

۱۶۶ - طول نقطه عطف منحنی نمایش تابع ریشه مشتق ثانی آن تابع است .

رفع ابهام دوسيله مشتق

$$۱۶۷ - \text{اگر در کسر } \frac{f(x)}{\varphi(x)} \text{ به } f(a) = 0 \text{ و } \varphi(a) = 0$$

باشد مقدار حقیقی آن مساوی است با مقدار حقیقی خارج قسمت

مشتقات صورت و مخرج کسر بازاء  $x = a$   
مثال - مقدار حقیقی کسر

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{x^4 - 9x^3 + 7x^2 - 2}{x^4 - 12x^3 + 10x^2 - 3}$$

را بازاء  $x = ۱$  باید تعیین کرد.

حل - از  $f(x)$  و  $\varphi(x)$  مشتق میگیریم

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{4x^3 - 27x^2 + 14x - 2}{4x^3 - 36x^2 + 20x - 6}$$



چون این کسر هم بازا ۱ مساوی  $\frac{1}{2}$  است باردیگر

از  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{3}$  مشتق بگیریم :

$$\frac{18}{24} = \frac{30}{36} = \frac{12}{12} = \frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

مقدار این کسر نیز بازا ۱ مساوی  $\frac{1}{2}$  است، باردیگر از

$\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{3}$  مشتق بگیریم

$$\frac{30}{36} = \frac{24}{24} = \frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

مقدار این کسر بازا ۱ مساوی  $\frac{1}{4}$  است بنا براین

مقدار حقیقی  $\frac{1}{2}$  بازا ۱ مساوی  $\frac{1}{4}$  است .

## XVII - تغییرات توابع

۱۶۸ - تعریف - مقصود از تعیین تغییرات تابع

$f(x)$  // تحقیق درجهت تغییرات آن تابع است بازا مقادیر مختلف  $x$  و قتی که  $x$  از  $a$  تا  $b$  تغییر کند، یعنی تعیین آنکه تابع درجه فواصل صعودی و درجه فواصل نزولی است و بازا چه مقادیری از  $x$  ماکزیمم یا مینیمم یا مساوی صفر میباشد.

۱۶۹ - تغییرات تابع درجه اول  $y = ax + b$

وقتی  $x$  از  $a$  تا  $b$  تغییر نماید تغییرات تابع //

بستگی به علامت  $a$  دارد، اگر  $a$  مثبت باشد تابع صعودی و اگر منفی باشد تابع نزولی است.

	$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$y$	$a > 0$	$-\infty$	$\nearrow 0$	$\nearrow +\infty$
	$a < 0$	$+\infty$	$\searrow 0$	$\searrow -\infty$

### ماکزیمم و می نیمم

۱۷۰ - تعریف - اگر تابع  $(x) = f(x)$  بازاء  $x = a$  اتصال بوده و بازاء  $x = a - \varepsilon$  مقدار یست مثبت و بی نهایت (کوچک) صعودی و بازاء  $x = a + \varepsilon$  نزولی باشد میگویند تابع بازاء  $x = a$  ماکزیمم است؛ و هرگاه تابع بازاء  $x = a - \varepsilon$  نزولی و بازاء  $x = a + \varepsilon$  صعودی باشد گویند تابع بازاء  $x = a$  می نیمم میباشد.

۹۷۹ - تعیین ماکزیمم و می نیمم دو سیله مشتق - برای بدست آوردن ماکزیمم و می نیمم تابعی مشتق آن را مساوی صفر قرار میدهیم و جواب های آنرا بجای  $x$  در تابع میگذاریم. مقداری که برای بدست می آید ماکزیمم است هرگاه تابع قبل از آن صعودی و بعد از آن نزولی باشد و می نیمم است هرگاه تابع پیش از آن نزولی و بعد از آن صعودی باشد (شماره ۱۶۵).

۹۷۴ - طریقه مستقیم برای تعیین ماکزیمم و

می نیمم بعضی توابع - ممکنست بدون استعمال مشتق در بعضی از توابع مقدار ماکزیمم یا می نیمم را مستقیما بدست آورد. این امر در مواردی ممکنست که هرگاه تابع  $(x) = f(x)$  را بر حسب قوای نزولی  $n$  مرتب نمائیم و در پارامتر فرض کنیم بتوان برای مبادله اخیر ریشه مضاعف بدست آورد؛ در اینصورت مقادیری

از پارامتر  $x$  که بازاء آنها معادله ریشه مضاعف پیدا کند ما کزیمم یا می نیمم تابع هستند .

مثال - تابع  $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 3}$  را نسبت به  $x$  مرتب می کنیم .

$(y+1)(x+3)(x+1) = x^2 + 2x - 3$  معادله (۱)  
 $(y-1)(x-1)(x+1) = 0$  معادله (۲)  
 ریشه مضاعف دارد و  $y_1 = -1$  و  $y_2 = 2$  ریشه های معادله (۲)  
 ما کزیمم و می نیمم تابع مذکور میباشند .

### ۹۷۳ - ماکزیمم و می نیمم مطلق

۱ - اگر حاصل جمع چند عدد مثبت ثابت باشد حاصل ضرب آنها وقتی ماکزیمم است که همه آن اعداد باهم مساوی باشند .  
 ب - اگر حاصل ضرب چند عدد مثبت ثابت باشد مجموع آنها موقعی می نیمم است که همه آنها باهم مساوی باشند .

۹۷۴ - تغییرات تابع درجه دوم  $y = ax^2 + bx + c$

تابع را میتوان بصورت  $y = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \right]$  نوشت (شماره ۷۲)

حال چون  $x$  از  $-\infty$  تا  $+\infty$  ترقی کند قدر مطلق تغییرات  $y$  بستگی به تغییرات  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$  و جهت تغییرات آن بستگی

بعلامت  $a$  دارد. این تغییرات را میتوان در جدول ذیل (که در آن  $M = \frac{\Delta ac - b^2}{\Delta a}$  فرض شده است) خلاصه کرد:

$x$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{b}{2a}$	$\nearrow$	$+\infty$
$x + \frac{b}{2a}$	$-\infty$	$\nearrow$	$\cdot$	$\nearrow$	$+\infty$
$(x + \frac{b}{2a})^2$	$+\infty$	$\searrow$	$\cdot$	$\nearrow$	$+\infty$
$(x + \frac{b}{2a})^2 + M$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{M}{a}$	$\nearrow$	$+\infty$
$y \begin{cases} a > 0 \\ a < 0 \end{cases}$	$+\infty$	$\searrow$	$M$ مینیم	$\nearrow$	$+\infty$
	$-\infty$	$\nearrow$	$M$ ماکزیمم	$\searrow$	$-\infty$

اگر  $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$  باشد  $x'$  و  $x''$  ریشه‌های معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  در دو طرف  $-\frac{b}{2a}$  قرار داشته  $y$  بازاء آنها تابع صفر است.

۱۷۵ - تغییرات تابع دومجدوری  $y = ax^2 + bx + c$

تابع را میتوان بصورت  $y = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{\Delta ac - b^2}{\Delta a} \right]$  نوشت و تغییرات آن وقتی که  $x$  از  $-\infty$  تا  $+\infty$  ترقی کند در جدول ذیل خلاصه میشود  $\left( M = \frac{\Delta ac - b^2}{\Delta a} \right)$ :

$x$	$-\infty$	$\sqrt{-b}$	$\sqrt{\frac{-b}{a}}$	$\sqrt{\frac{-b}{a}}$	$\sqrt{\frac{-b}{a}}$
-----	-----------	-------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------

$\left(a + \frac{b}{a}\right)$	$b$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{\frac{b}{a}}$	$\sqrt{\frac{b}{a}}$	$\sqrt{\frac{b}{a}}$
$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$

$a >$	$b >$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$
$a <$	$b <$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$

$a >$	$b >$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$
$a <$	$b <$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$

در صورتیکه  $\Delta > 0$  و  $\frac{c}{a} > 0$  و  $\frac{b}{a} > 0$  باشند چهار

ریشه معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  در دو طرف  $\pm \sqrt{\frac{b}{2a}}$  قرار می گیرند و تابع بازاء آنها صفر است. هرگاه  $\Delta > 0$  و  $\frac{c}{a} < 0$  باشند دو ریشه معادله یکی طرف چپ  $-\sqrt{\frac{b}{2a}}$  و دیگری طرف راست  $+\sqrt{\frac{b}{2a}}$  قرار می گیرند.

### xxviii - نمایش هندسی توابع

۱۷۶ - تهریث ۱ - در تابع  $y = f(x)$  مقدار  $x$  مقداری برای  $y$  پیدا میشود. چون این دو مقدار را مختصات نقطه ای مانند  $M$  فرض کنیم نسبت بدو محور عمود  $OM'$  و  $Oy'$  وضع آن نقطه را میتوان مشخص کرد. چون  $x$  و در نتیجه  $y$  تغییر کنند  $M$  در صفحه تغییر جا میدهد و از حرکت آن یک منحنی پدید می آید. این منحنی را منحنی نمایش تغییرات تابع  $y = f(x)$  میگویند.

پس هر نقطه که بر منحنی باشد مختصاتش در رابطه  $y = f(x)$  صدق میکند و هر نقطه که مختصاتش در آن رابطه صدق کند بر روی منحنی است.

تهریث ۲ - منحنی مکان هندسی نقاطی است که بر حسب قاعده معینی، در صفحه یا در فضا، تغییر مکان دهند. رابطه ای که این قاعده را بیان می کند معادله منحنی است. نمایش تغییرات تابع درجه اول  $ax + by + c = 0$

۱۷۷ - قضیه - منحنی نمایش تغییرات تابع درجه اول

خطی است مستقیم .

۱۷۸ - قضیه - مختصات نقاط هر خط مستقیم در معادله

درجه اول  $ax + by + c = 0$  صدق میکند .

۱۷۹ - قضیه - در هر سه جمله درجه اول  $ax + by + c = 0$  :

اولا : ۱) هرگاه  $a = 0$  باشد ،  $ax + by + c = 0$  یا

$y = -\frac{c}{b}$  . منحنی نمایش  $y$  خطی است موازی محور  $x$  ها .

ب) معادله هر خط که موازی محور  $x$  ها باشد  $y = c$  است ،

ثانیا : ۱) هرگاه  $b = 0$  باشد ،  $ax + by + c = 0$  یا  $x = -\frac{c}{a}$  . منحنی

نمایش  $x$  خطی است موازی محور  $y$  ها .

ب) معادله هر خط موازی محور  $y$  ها  $x = c$  است .

ثالثا : ۱) اگر  $c = 0$  باشد  $y = -\frac{a}{b}x$  ؛ منحنی خطی

است که بر  $(0)$  ، مبدأ مختصات ، میگذرد .

ب) ( معادله هر خط که بر مبدأ مختصات بگذرد

$ax + by = 0$  است .

رایها : اگر  $a$  و  $b$  و  $c$  مخالف صفر باشند خط محورها

را در دو نقطه قطع میکند و معادله آن بصورت  $ax + by = n$  :

است . در اینصورت  $n$  ضریب زاویه ای و  $n$  عرض از مبدأ

خط است .

۱۸۰ - ضریب زاویه ای هر خط تاوانت زاویه ایست

که این خط باجهت مثبت محور  $x$  ها تشکیل میدهد . پس ضریب

نمایش هندسی توانیم

۱۰۳

زاویه‌ای خطوط موازی محور  $m$  ها صفر و از آن خطوط موازی محور  $m$  ها است.

۱۸۱ - زاویه دو خط - اگر  $m$  و  $m'$  ضریب زاویه ای دو خط  $\triangle$  و  $\triangle'$  و  $\alpha$  زاویه بین آنها باشد :

$$\alpha = \frac{m - m'}{1 + mm'}$$

دو خط موازی : اگر  $\alpha = 0$  باشد  $m = m'$  یعنی ضرایب زاویه‌های دو خط موازی مساویند .

دو خط عمود بر هم : اگر  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  باشد  $\alpha = 0$  باشد

یعنی  $1 + mm' = 0$  پس  $m' = -\frac{1}{m}$  یعنی اگر خطی بر خط دیگر عمود باشد ضریب زاویه اش مساوی عکس زاویه دیگر است یا علامت مخالف .

۱۸۲ - معادله خطی که بر یک نقطه می‌گذرد - معادله خط  $\triangle$  که با ضریب زاویه ای  $m$  بر نقطه  $M(x', y')$  می‌گذرد :

$$(y - y') = m(x - x')$$

۱۸۳ - معادله خطی که بر دو نقطه می‌گذرد - اگر مختصات دو نقطه را به ترتیب  $(x', y')$  و  $(x'', y'')$  فرض کنیم

$$\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$$

مساوات مختصاتی - معادله خطی که از نقاط  $A(a, 0)$  و  $B(0, b)$  بگذرد :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$a$  و  $b$  را به ترتیب طول و عرض از مبدا خط گویند .



۱۸۴ - فاصله نقطه از خط - فاصله نقطه  $M(x', y')$  از خطی که معادله اش  $ax + by + c = 0$  میباشد عبارتست از :

$$d = \frac{ax' + by' + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۱۸۵ - رسم خط - برای رسم يك خط گاهی است مختصات دو نقطه آنرا بدست آوریم . بهتر این است كه طول یکی از این نقاط و عرض دیگری را صفر انگاشته عرض آن و طول این را از روی معادله خط بدست آوریم .

۱۸۶ - فصل مشترك دو خط - مختصات فصل مشترك دو خط  $ax + by + c = 0$  و  $a'x + b'y + c' = 0$  جوابهای دستگاه :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

میباشند، یعنی

$$x = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'} \quad \text{و} \quad y = \frac{ca - ac'}{ab' - ba'}$$

مجاذبهها

۱۸۷ - تهر یف - اگر نقطه  $M$  بتواند در روی يك منحنی بی نهایت دور شود میگویند این منحنی يك شاخه بی نهایت دارد .

۱۸۸ - مجاذب - هر گاه خطی مانند  $\triangle$  بتوان یافت كه فاصله نقطه  $M$  منحنی از آن ، وقتی كه  $M$  بی نهایت در

زوي منحنى دور شود ، بسمت صفر ميل کند ، خط  $\triangle$  را مجانب منحنى گويند .

يعبارت ديگر مجانب خطى است که در بى نهايت بر منحنى مماس شود .

مجا نيب بر سه قسم است : افقى يا موازى محور  $x$  ها ، قائم يا موازى محور  $y$  ها ، مایل .

۱۸۹ — — مجانب افقى — هر گاه در تابع  $y = f(x)$  وقتى که  $x$  بى نهايت بزرگ شود  $y$  بسمت مقدار ثابت  $a$  ميل کند خط  $y = a$  را مجانب افقى منحنى نمايش تغييرات تابع  $y = f(x)$  گويند .

۱۹۰ — — مجانب قائم — هر گاه در تابع  $y = f(x)$  وقتى که  $y$  بى نهايت بزرگ شود  $x$  بسمت مقدار ثابت  $b$  ميل کند خط  $x = b$  مجانب قائم منحنى است .

۱۹۱ — — مجانب مایل — اگر خط  $y = mx + n$  مجانب مایل منحنى  $y = f(x)$  باشد :

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}$  است وقتى که  $x$  ميل کند بسمت بى نهايت

$\lim_{x \rightarrow \infty} y - mx$  است وقتى که  $y$  ميل کند بسمت بى نهايت .

۱۹۲ — — قاعده عملى — برای پيدا کردن مجانبها

(۱) منحنىهاى که معادله آنها خطى است ، يعنى كسرى يا اصم نيست ، مجانب ندارند .

(ب) در تابع كسرى  $y = \frac{f(x)}{\phi(x)}$  برای تعيين مجانبها

باینطریق باید عمل کرد :

۱ — مجانب قائم : معادله آنها ریشه های  $\varphi(x) = 0$  است .

۲ — مجانب افقی : معادله آنها حدکسر  $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$  است

وقتی  $x$  میل کند بسوی بی نهایت ( شماره ۱۵۶ ) .

۳ — مجانب مایل : خارج قسمت تقسیم  $f(x)$  بر  $\varphi(x)$  معادله مجانب مایل است .

تذکره - اگر درجه  $\varphi(x)$  از  $f(x)$  زیادتر یا یا  $T$  است

مساوی باشد منحنی مجانب مایل ندارد . اگر درجه  $f(x)$

از  $\varphi(x)$  یکی بیشتر باشد مجانب خطی مستقیم است . هرگاه

اختلاف درجات بیش از یکی باشد مجانب منحنی است .

در معادلات اصم ( غیر کسری ) مجانب موازی ( قائم و افقی )

نیست و معادله مجانب مایل پس از تعیین  $n$  حد  $\frac{f}{x}$  و  $n$  حد  $x$  —  $y$

وقتی  $x$  میل کند بسوی بی نهایت بدست میآید .

### تقعر و تحدب

۱۹۲ — تقعر و تحدب - اگر مماس مرسوم در نقطه

$M$  بر منحنی ، منحنی را در همان نقطه قطع نکند میگویند

منحنی در این نقطه محدب ( یا مقعر ) است . بر حسب

$T$  آنکه منحنی در مجاورت  $M$  بالا یا پایین مماس باشد

میگویند تقعر منحنی بطرف بره های مثبت یا منفی است و بر

حسب  $T$  آنکه بر است یا بچپ مماس باشد تقعر منحنی بطرفه

$x$  های مثبت یا منفی است .

۱۹۳ — نقطه عطف - اگر مماس در  $M$  بر منحنی ،

منحنی را در همان نقطه قطع کند، منحنی در آن نقطه تغییر جهت نقعر داده است.  $M'$  را نقطه عطف منحنی میگویند.

۱۹۵ - قضیه - مشتق دوم هر تابع بازاء طول نقاطی که نقعر منحنی نمایش آن تابع بطرف بره‌های مثبت است مثبت و بازاء طول نقاطی از منحنی که نقعر آن بطرف بره‌های منفی است منفی می‌باشد.

نتیجه - در نقطه عطف مشتق دوم مساوی صفر است.

#### تقارن

۱۹۶ - محور تقارن - خط  $\Delta$  را محور تقارن يك منحنی گویند در صورتیکه اگر خطی بر هر نقطه غیر مشخص  $N$  از  $\Delta$  عمود گردد و منحنی را در  $M'$  و  $M$  قطع کند،  $N$  وسط  $M M'$  باشد.

مرکز تقارن - نقطه  $(\alpha, \beta)$  را مرکز تقارن منحنی گویند در صورتیکه اگر هر خط غیر مشخص که بر  $A$  بگذرد و منحنی را در دو نقطه  $M'$  و  $M''$  قطع کند،  $A$  وسط  $M' M''$  باشد.

۱۹۷ - تعیین محور تقارن - برای آنکه بدانیم منحنی نمایش  $(x, y)$  محور تقارن دارد یا نه، و اگر دارد برای بدست آوردن معادله آن، شرط  $\Delta$  بمعادله  $n - \frac{1}{2}m x = y$  را (که در آن باید پارامترهای  $m$  و  $n$  را مشخص ساخت) فرض می‌کنیم و نقطه  $(n - \frac{1}{2}m x, y)$  را بر آن اختیار می‌کنیم و از آن خط  $(x - \alpha) = \frac{1}{m}(n - \frac{1}{2}m x - y)$  را بر  $\Delta$

عمود کرده  $M_1'$  و  $M_1''$  فصل مشترک‌های  $T$  را با منحنی  $y=f(x)$  بدست می آوریم - اگر  $(x', y')$  و  $(x'', y'')$  مختصات  $M_1'$  و  $M_1''$  باشند و  $\triangle$  محور تقارن باشد چنین خواهیم داشت :

$$(1) \quad \frac{y' - y''}{2} = a \quad (2) \quad \frac{y' + y''}{2} = m\alpha + n$$

روابط (۱) و (۲) نباید بستگی به  $\alpha$  داشته باشند ، پس هرگاه آنها را بر حسب  $\alpha$  مرتب کنیم باید در هر یک ضریب  $\alpha$  و جمله مستقل از  $\alpha$  مساوی صفر شوند . باین ترتیب مقادیری برای  $m$  و  $n$  بدست می آید . اگر مقادیری که از روابط (۱) و (۲) بدست آمده اند با هم مساوی باشند  $\triangle$  محور تقارن است ، وگرنه نیست .

۱۹۸ - تعیین مرکز تقارن - برای تعیین آنکه منحنی  $(x) \quad y=f(x)$  مرکز تقارن دارد نقطه  $M(\alpha, \beta)$  را، که در آن  $\alpha$  و  $\beta$  بعداً تعیین خواهند شد، اختیار می کنیم و خط  $y-\beta=m(x-\alpha)$  را بر آن مرور داده محل برخورد آن را با  $y=f(x)$  بدست می آوریم . اگر  $A(x', y')$  و  $B(x'', y'')$  نقاط تقاطع و  $M$  مرکز تقارن باشند :

$$\beta = \frac{y' + y''}{2} \quad (2) \quad \text{و} \quad \alpha = \frac{x' + x''}{2} \quad (1)$$

روابط (۱) و (۲) باید از  $m$  مستقل باشند پس بسایند ضرایب قوای مختلفه  $m$  در آنها مساوی صفر شوند . از بیان این شرط در رابطه (۱) برای  $\alpha$  و  $\beta$  مقادیری بدست می آید، اگر این

مقادیر ضرایب قوای مختلفه  $m$  را در رابطه (۲) نیز صفر کنند. منحنی مرکز تقارن دارد و مقادیری که برای  $\alpha$  و  $\beta$  بدست آمده اند مختصات این مرکزند.

۱۹۹ - قضیه - اگر يك منحنی دو محور تقارن عمود برهم داشته باشد محل تقاطع آنها مرکز تقارن منحنی است.

مماس بر منحنی

۲۰۰ - مماس - اگر خطی منحنی  $(x, y = f(x))$  را در  $M'$  و  $M''$  قطع کند سپس در حول  $M'$  نقطه بچرخد که  $M''$  بی نهایت به  $M'$  نزدیک شود حد خط را مماس بر منحنی در نقطه  $M'$  گویند.

۲۰۱ - ضریب زاویه ای مماس بر منحنی  $(x, y = f(x))$  در نقطه ای بطول  $a$  عبارتست از مقدار مشتق  $f'(x) = f'(a)$  یا زاء  $x = a$ .

۲۰۲ - رسم مماس بر منحنی  $y = f(x)$

(۱) معادله مماس بر منحنی که بر نقطه  $M$  بطول  $a$  واقع بر منحنی می گذرد عبارتست از  $x = a$   $y = f(a) = f'(a)$

(۲) معادله مماسی که از نقطه  $(\alpha, \beta)$  واقع در خارج منحنی بر منحنی رسم شود بدو قاعده بدست می آید.

قاعده اول: تعیین ضریب زاویه ای مماس — معادله کلی خطوطی را که بر  $(\alpha, \beta)$   $M$  میگذرند مینویسیم:

$(x = \alpha, y = \beta = m(x - \alpha) + f(\alpha))$   $T$  انگاه آن را با معادله منحنی  $y = f(x)$  حل میکنیم؛ شرط آنکه خط بر منحنی مماس باشد اینست که:

دستگاه يك ریشه مضاعف داشته باشد. مقداری از  $m$  «كه» بازار آنت ریشه مضاعف بدست میآید. ضریب زاویه‌ای تماس است.

قاعده دوم - تعیین طول نقطه تماس - معادله کلی تماس بر نقطه‌ای از منحنی به دست میآید  $[a, f(a)]$  را می‌نویسیم:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

بعد بجای  $x$  و  $y$  مقادیر  $a$  و  $f(a)$  را می‌گذاریم و  $a$  یعنی طول نقطه تماس را بدست می‌آوریم.

رسم منحنی

۲-۳ - برای رسم منحنی نمایش تغییرات تابع  $y = f(x)$  یا بنظر یک عمل می‌کنیم:

(۱) ریشه‌های  $f(x) = 0$  را بدست می‌آوریم. (۲) مقدار  $y$  را بازار  $x = \pm\infty$  معین می‌کنیم.

(۳) معادلات مجانبها را تعیین می‌نمائیم (۴) بوسیله مشتق طول و عرض نقاط ما گزینیم و می‌توانیم را معلوم می‌کنیم.

(۵) با مشتق درم طول نقطه عطف را معین می‌کنیم.

(۶) جدول نمایش تغییرات را ترتیب می‌دهیم. (۷) نسبت بدو محور متعامد نخست مجانبها را می‌سازیم و بعد بكمك نقاطی كه در جدول تغییرات ثبت شده اند و با مراعات جهت تغییرات

منحنی را رسم می‌کنیم. اینك چند مثال:

مثال ۹ - رسم منحنی تابع هموگرافيك  $y = \frac{x-1}{x+1}$

$$y = 1, x = 0, y = 0, x = \frac{1}{2}$$

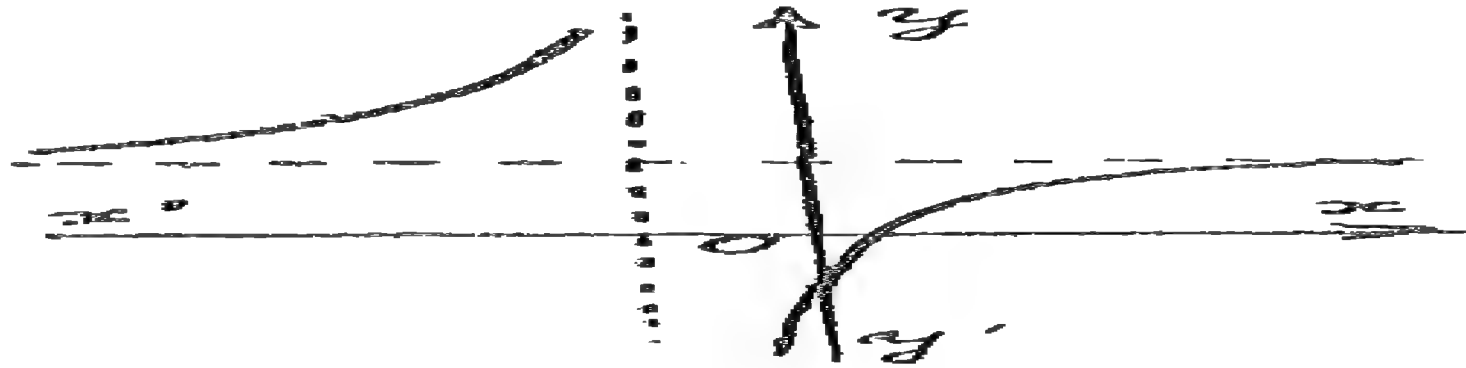
ماکزیم و می نیمم

$$x = \infty, y = 2$$

$$x = -1, y = \infty$$

همیشه مثبت است  $y' = \frac{2}{(x+1)^2}$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$\infty$
$y'$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$y$	$2$	$\infty$	$1$	$0$	$2$



مثال ۲

تغییرات تابع

$$y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 1}$$

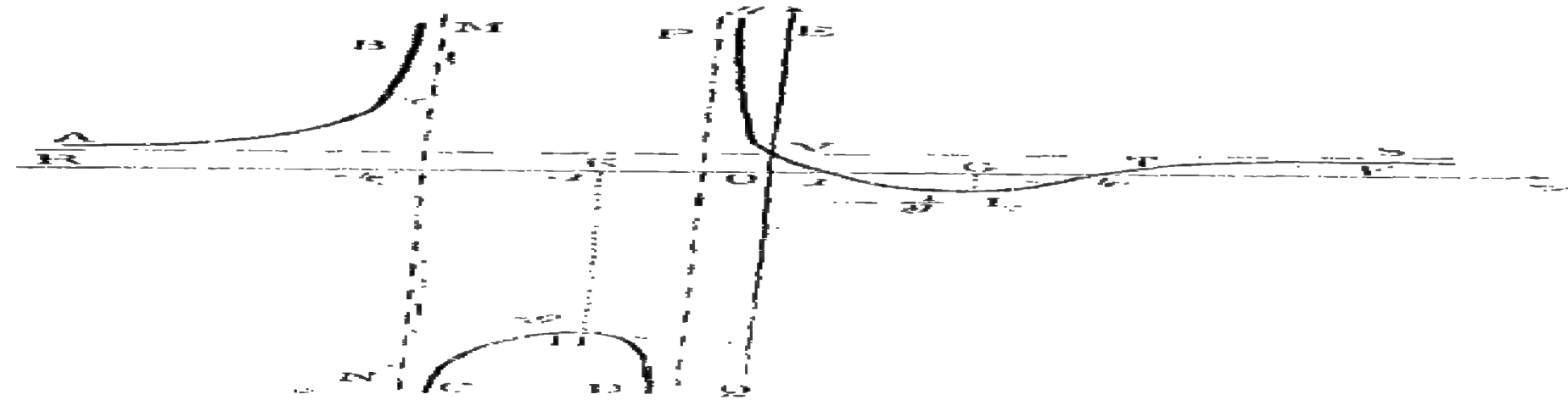
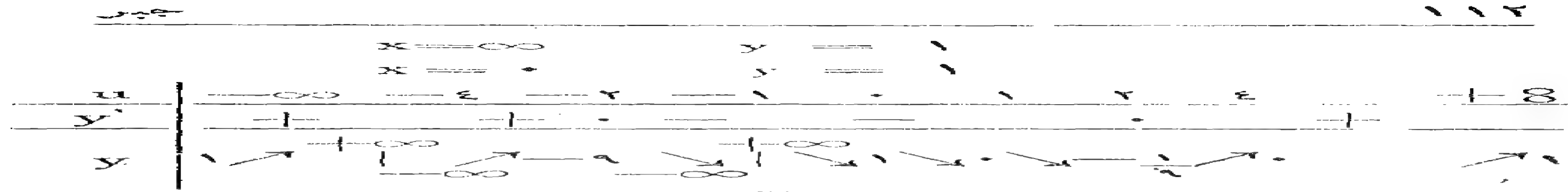
$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$y' = \frac{2(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$\begin{aligned} y = 0 & \quad x = 1 \text{ و } x = -1 \\ y = \infty & \quad x = 1 \text{ و } x = -1 \end{aligned}$$





مثالی ۴ - معدل و بست رسم منحنی  $y = \frac{\cos^2 x}{1 + \cos^2 x}$  وقتی:

$$-a < x < a$$

$$y = \frac{\cos^2 x}{1 + \cos^2 x} = \frac{\epsilon \cos^2 x - \gamma}{\gamma \cos^2 x}$$

$$y' = \frac{-\sin x (\sqrt{2} \cos^2 x - 1)}{\sqrt{2} \cos^2 x}$$

$$y' = 0 \text{ , } \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$$

$$y' = \infty \text{ , } \cos x = 0$$

$$x = 90^\circ, 270^\circ$$

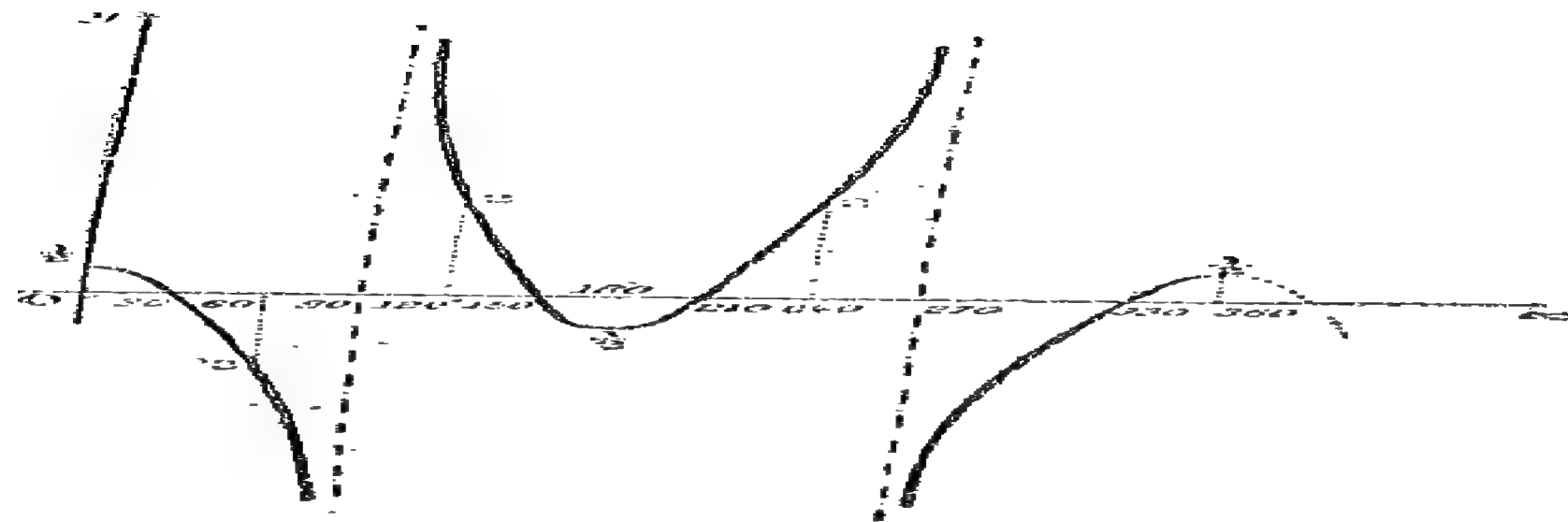
$$x = 0^\circ \text{ , } y = 1$$

$$y' = 0 \text{ , } \sin x = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0^\circ \\ y = 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 180^\circ \\ y = -1 \end{array} \right.$$

$$y' \geq 0 \quad 180^\circ \leq x \leq 360^\circ$$

$x$	$0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$	$180^\circ$	$225^\circ$	$270^\circ$	$315^\circ$	$360^\circ$
$y'$	0	-	-	-	0	+	+	+	0
$y$	$1$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

حال اگر منحنی تغییرات فوق را رسم کنیم شکل ۱۱ بدست میآید



شکل ۱۱

## XXXX حل معادلات بوسیله رسم منحنی

۲۰۴ - حل معادله  $f(x) = 0$  هرگاه جواب های معادله  $f(x)$  برآهائی که در حدود اطلاع مسا هستند بدست نیایند میتوان منحنی نمایش تغییرات  $f(x)$  را با دقت هرچه بیشتر رسم کرد؛ طول نقاط تلاقی این منحنی با محور  $x$  ها جوابهای تقریبی معادله اند.

۲۰۵ - حل دستگاه دو معادله  $f(x, y) = 0$  و  $\varphi(x, y) = 0$

در هر يك از معادلات // را بر حسب  $y$  بدست میآوریم:  
 $f_1'(y) = //$  و  $f_2'(y) = //$  ؟ آنگاه منحنی دو تابع اخیر را با دقت  
 تمام رسم میکنیم ؟ مختصات نقاط برخورد منحنیها جواب های  
 دستگاه یفر و ضند .

۲۰۶ — بحث در وجود و علامت ریشه های  
 معادله پارامتری  $f'(y, m) = 0$

از رابطه  $f'(y, m) = 0$  پارامتر  $m$  را بر حسب  $y$  بدست  
 میآوریم ؟  $f_1'(y) = //$  ،  $m = f_2'(y)$  ، سپس منحنی تغییرات  $(y, m)$   
 را رسم میکنیم ( بجای // فرض میشود ) و نیز خط  $m = //$   
 را وقتی  $m$  از  $\infty$  — تا  $\infty$  — تغییر کند رسم میکنیم ، بر  
 حسب آنکه خط منحنی را قطع نکند یا بکند یا بر آن مماس  
 شود معادله دارای جواب نیست یا هست یا جواب مضاعف  
 دارد .

### ۳۳۳ — حل نامعادلات یوسيله منحنی

۲۰۷ — منحنی نمایش  $f'(y) = //$  صفحه را بدو ناحیه  
 تقسیم میکند . مختصات هر نقطه واقع بر منحنی در رابطه  
 $f'(y) = //$  صادقند و مختصات هر نقطه غیر واقع بر منحنی در  
 یکی از دو رابطه  $f'(y) = 0$  یا  $f'(y) = //$  صدق می  
 کنند . مختصات جميع نقاط واقع در یکی از دو ناحیه صفحه در  
 یکی از دو رابطه اخیر و جميع نقاط واقع در ناحیه دیگر در  
 رابطه دیگر صادق میباشد .

۲۰۸ — حل نامعادله  $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  — نخست  $(x, y, z)$  را مساوی صفر انگاشته  $(x, y, z)$  را بوسیله آن بدست میآوریم و منحنی آنرا میکشیم، آنگاه مختصات یا نقطه  $M$  واقع در خارج این منحنی (مبداء مختصات در صورتیکه بر روی منحنی نباشد از هر نقطه دیگر بهتر است) را در رابطه  $(x, y, z)$  میگذاریم اگر نتیجه مثبت باشد جمیع نقاط واقع در ناحیه‌ایکه شامل نقطه  $M$  است در نامعادله صادقند، والا نقاط ناحیه دیگر.

۲۰۹ — حل دستگاه نامعادلات

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \\ \frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \\ \frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \end{cases}$$

برای هر يك از سه رابطه دستگاه ناحیه‌ای از صفحه را که جواب مسئله است نگاه داشته ناحیه دیگر را هاشور میزنیم مختصات نقاط قسمت‌های از صفحه که پس از خاتمه کار بی‌هاشور بمانند جوابهای دستگاهند.

XXXX — تابع اولیه — سطح مخصوص

۲۱۰ — اگر  $f(x) = \frac{1}{x}$  مشتق اول تابع  $F(x) = \ln x$  باشد  $F(x)$  را تابع اولیه  $f(x)$  میگویند و آنرا چنین نمایش میدهند 
$$Y = \int f(x) dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

مثال :  $\frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{2} + x = f(x^2 - x + 1) dx$

۲۱۱ - هرگاه پس از تعیین تابع اولیه تابع  $y = f(x)$  دو مقدار  $a$  و  $b$  را بجای  $x$  قرار داده تفاضل مقادیری را که بدست میآیند تعیین کنیم میگوئیم مقدار تابع اولیه  $y = f(x)$  را بین دو حد  $x = a$  و  $x = b$  بدست آورده ایم .

مثال :  $\int_2^3 (x^2 - 5x) dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} \right]_2^3$

$$= \left( \frac{3^3}{3} - 5 \frac{3^2}{2} \right) - \left( \frac{2^3}{3} - 5 \frac{2^2}{2} \right) = \frac{37}{6} - \left( \frac{8}{3} - 10 \right) = \left( 9 - \frac{40}{3} \right) = \frac{37}{6}$$

۲۱۲ - قضیه - هرگاه  $F(x)$  تابع اولیه  $f(x)$  باشد و  $c$  هم تابع اولیه آنست (  $c$  عددیست ثابت )

۲۱۳ - توابع اولیه مهم بدینقرارند :

تابع  
 $y = 0$   
 $y = a$   
 $y = ax^m$   
 $y = \frac{a}{\sqrt{x}}$

تابع اولیه  
 $y = a$  ( مقدار ثابت )  
 $y = a x + c$   
 $y = \frac{a}{m+1} x^{m+1} + c$   
 $y = 2a \sqrt{x} + c$

چهار

$$y = \sin x$$

$$y = a \sin mx$$

$$y = \cos x$$

$$y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$y = \sqrt{1 + \tan^2 x}$$

$$y = \sqrt{1 + \sin^2 x}$$

$$y = \sqrt{1 + \cot^2 x}$$

$$y = \sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

$$y = \cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

$$y = \tan x = \frac{1}{\cos x} - 1$$

$$Y = -\cos x + C$$

$$Y = -\frac{a}{m} \cos mx + C$$

$$Y = \sin x + C$$

$$Y = \lg x + C$$

$$Y = \lg x + C$$

$$Y = \cot g x + C$$

$$Y = -\cot g x + C$$

$$Y = \frac{1}{2} (x + \frac{1}{2} \sin 2x) + C$$

$$Y = \frac{1}{2} (x + \frac{1}{2} \sin 2x) + C$$

$$Y = \lg x - x + C$$

۲۱۴ — قضیه . هرگاه تابع  $y = f(x)$  در فاصله  $x_1$

و  $x_2$  اتصال یافته باشد سطح محصور بین

منحنی نمایش  $y = f(x)$  و محور  $x$

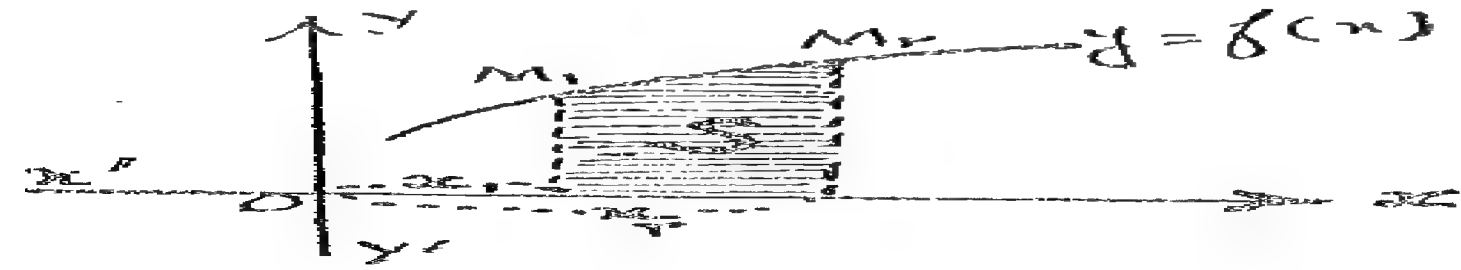
ها و دو عرض ثابت بطول  $x_1$  و  $x_2$

مساوی است با مقدار تابع اولیه

$(f(x))$  بین دو حد  $x_1$  و

$x_2$  یعنی :

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

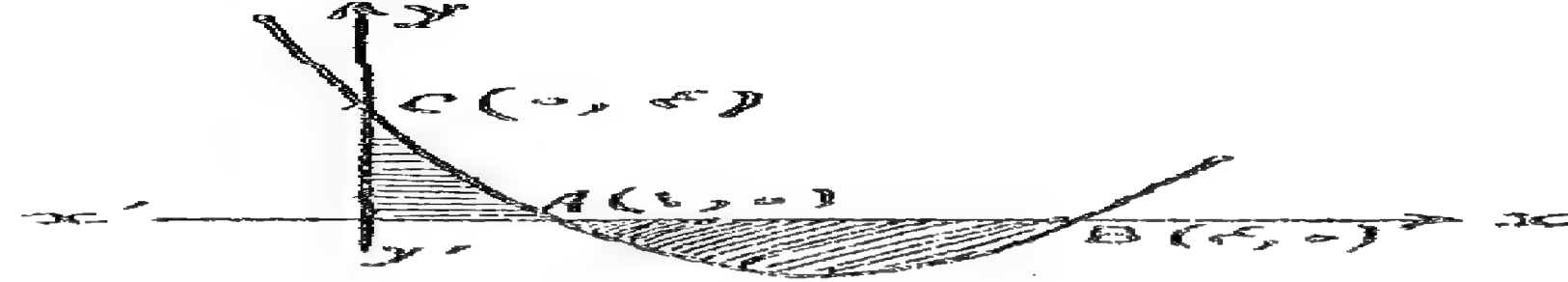


شکل ۱۲

مثال ۱ — سطح محصور بین محاور  $x$  و  $y$  و منحنی

$$y = 5x - x^2 \quad (ش ۱۳)$$

$$S = \int_0^5 (5x - x^2) dx = \left[ \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^5 = \frac{125}{6}$$



شکل ۱۳

بین منحنی مثال ۱ و محاور  $x$  و  $y$  و محاور  $x$  و  $y$  (ش ۱۳)

$$S = \int_0^5 (5x - x^2) dx = \frac{125}{6}$$

### مجموعه چهارم

۱۱۱۱ معادلات منحنی‌های مخصوص (۱)

۲۱۵ — معادله دایره — اگر مرکز دایره  $M(a, \beta)$  و شعاع آن  $R$  باشد:

$$R^2 = (x-a)^2 + (y-\beta)^2$$

۲۱۶ — معادله بیضی — وقتی مرکز و محاورهای آن به ترتیب بر مرکز و محاورهای مختصات منطبق باشند:

(۱) رخوخ شود به صورت معادلات همین کتاب



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

( $a$  و  $b$  نصف محورهاى بلند و کوتاه بیضی هستند)

۲۱۷ - معادله هندلوی - با شرایط شماره ۲۱۶ :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

۲۱۸ - معادله سهمی - وقتی محور آن بر محور  $x$  ها و رأس آن بر مرکز منطبق باشند و فاصله کانون از خط هادی را  $p$  بینمائیم :

$$y^2 = 2px$$

### XXXXIII حل معادلات دو جمله و سه جمله

۲۱۹ - معادله دو جمله - معادله دو جمله درجه  $n$  ام

بصورت  $P(x) = 0$  می باشد (  $P(x)$  برای حل آن  $x^p$  را عامل مشترک قرار میدهم :

$$P(x) = 0$$

علاوه بر  $P$  جواب مساوی ، جواب دیگر معادله عبارتست از :

$$x = \frac{b}{a}$$

## قاعده بزو برای حل معادلات چند مجهولی درجه اول ۱۲۱

اگر  $p$  و  $n$  هر دو زوج یا هر دو فرد باشند شرط قابل قبول بودن جواب آنست که  $a$  و  $b$  مختلف‌العلامه باشند.

۲۲۰ - معادله سه جمله - این معادله که صورت کلی آن  $ax^q = c$  یا  $ax^p = b$  است در حالت خاصی که  $n$  و  $p$  و  $q$  جمله های يك تصاعد حسابی باشند بصورت يك معادله درجه دوم در می آید و قابل حل است. زیرا چون تفاضل  $q - p = p - n$  را فرض کنیم  $q = 2r$   $n - q$  میشود و چون در سه جمله  $a$  را عامل مشترك قرار دهیم:

$$x^q (ax^n - c) = 0 \quad \text{یا} \quad x^q (ax^p - b) = 0$$

$$x^q (ax^{2r} - c) = 0 \quad \text{یا} \quad x^q (ax^r - b) = 0$$

$x^r$  را مساوی  $y$  فرض مینمائیم، پس

$$x^q (ay^2 - c) = 0 \quad \text{یا} \quad x^q (ay - b) = 0$$

## XXXXIV - قاعده بزو برای حل معادلات چند

### مجهولی درجه اول

۲۲۱ - این قاعده عبارتست از تمهیم قاعده حذف که در حل معادلات دو مجهولی درجه اول ذکر گردیده است (شماره ۶۵)

فرض کنیم مقصود حل دستگاه درجه اول سه مجهولی

$$(I) \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$$

اگر دو معادله آخر این دستگاه را بترتیب در مقادیر  
اختیاری  $\alpha$  و  $\beta$  ضرب و سه معادله را باهم جمع و بر حسب  $\alpha$   
و  $\beta$  مرتب کنیم چنین خواهیم داشت .

$$(a + \alpha a' + \alpha''\beta)x + (b + \alpha b' + b''\beta)y + (c + \alpha c' + c''\beta)z + (d + \alpha d' + d''\beta) = 0$$

بدیهیست که معادله اخیر جوابهای دستگاه (I) را قبول  
میکند. حال مامیتوانیم مقادیر اختیاری  $\alpha$  و  $\beta$  را طوری انتخاب  
کنیم که ضرایب  $\beta$  و  $\alpha$  در معادله اخیر صفر شوند .  
برای اینکار باید  $\alpha$  و  $\beta$  ریشههای دستگاه

$$\begin{cases} b + \alpha b' + b''\beta = 0 \\ c + \alpha c' + c''\beta = 0 \end{cases}$$

باشند یعنی

$$\beta = \frac{bc' - cb'}{b'c'' - c'b''} \quad \alpha = \frac{b''c - cb''}{b'c'' - c'b''}$$

در اینصورت

$$x = \frac{d + \alpha d' + d''\beta}{a + \alpha a' + \alpha''\beta}$$

برای بدست آوردن  $\beta$  و  $\alpha$  به همین نحو ضرایب دو معادله دیگر  
را مساوی صفر قرار میدهیم .

# ۷ xxx معادلات مجهول القوی و لگاریتمی

۲۲۲ - تعریف - معادله مجهول القوی آنست که در آن مجهول بصورت نماینده عدد معلومی درآمده باشد . معادله لگاریتمی آنست که در آن لگاریتم عددهای مجهول و خود آنها وجود داشته باشند .

با چند مثال نوعهای مختلف اینگونه معادلات و راه حلهای آنها را نشان میدهیم . (در مثالها حروف معلوم همه مثبت فرض میشوند )

مثال ۱ -  $a^x = b$

$$x = \frac{\log a}{\log b} \quad \text{یا} \quad \log a = x \log b$$

مثال ۲

$$a^x = b^m$$

فرض میکنیم  $m \neq 0$  و  $x = \frac{\log b}{\log a}$  باشد پس  $a^x = b$

$$x = \log \left[ \frac{\log b}{\log a} \right] \quad \text{یعنی}$$

مثال ۳

$$aa^{xx} + ba^{xx} = c$$

فرض میکنیم  $aa^{xx} = y$  باشد پس  $\log y = \log aa^{xx}$

و  $y$  ریشه معادله  $y + by = c$  است .

مثال ۴

$$\begin{cases} \log ax + \log y = m \\ ax + by = c \end{cases}$$

این دستگاه تبدیل میشود بدستگاه

$$\begin{cases} xy = \sqrt{m} \\ ax + by = c \end{cases}$$

مثال ۵

( I )

$$\begin{cases} x^a = y^x \\ x^a = y^b \end{cases}$$

دستگاه ( I ) تبدیل میشود بدستگاه :

$$( II ) \begin{cases} y \log x = a \log y \\ a \log x = b \log y \end{cases}$$

که پس از تقسیم عضو عضو بصورت  
 $x = \frac{a}{b} y$   
 درمیآید و اگر فرض کنیم  $a = b$  باشد مقادیر  $a$  عبارتند از  
 جولیهای معادله

$$x^b (x^{(a-b)} - (\frac{a}{b})^b) = 0$$

$$A (ax^2 + bx + c) = B \quad \text{مثال ۶ معادله}$$

$$ax^2 + bx + c = \frac{\log B}{\log A} \quad \text{منجر میشود بمعادله}$$

xxxxx VII. تجزیه رادیکالهای مرکب

$$243 \text{ --- منقسمه از این عمل تجزیه عبارت } \sqrt{A} = E \sqrt{B}$$

است بصورت مجموع یا تفاضل دو رادیکال .

قضیه - اگر  $A + \sqrt{B} = A' + \sqrt{B'}$  باشد  
(B و B' مجذور کامل نیستند)  $A = A'$  و  $B = B'$  میباشد .

حال برای تجزیه  $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$  آنرا مساوی  $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$  فرض نموده و آنرا حساب میکنیم :

$$\begin{aligned} \sqrt{A \pm \sqrt{B}} &= \sqrt{x} \pm \sqrt{y} \\ A \pm \sqrt{B} &= x + y \pm 2\sqrt{xy} \end{aligned}$$

پس :

$$\begin{cases} x + y = A \\ xy = \frac{B}{4} \end{cases}$$

$x$  و  $y$  ریشه های معادله  $x^2 - Ax + \frac{B}{4} = 0$  میباشد :

$$x = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2} \quad // \quad y = \frac{A \mp \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2} \pm \sqrt{\frac{A \mp \sqrt{A^2 - B}}{2}}}$$

بدیهیست که برای مرکب نبودن طرف دوم باید  $A^2 - B$  مجذور کامل باشد .

## XXXXVII حل معادله درجه سوم

۲۲۴ - نخست میگوئیم هر معادله کامل درجه سوم را

میتوان بصورت معادله ناقص  $x^2 + px + q = 0$  در آورده .  
 زیرا اگر در معادله  $a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$  نخست  
 تمام جمل را بر  $a_1$  تقسیم کنیم بصورت  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  فرض نمائیم و  
 بجای  $a$  مقدار  $-\frac{a_2}{a_1}$  را قرار دهیم ضریب درجه دوم از بین  
 میرود و معادله بصورت  $x^3 + px + q = 0$  در می آید . که

$$\text{در آن } p = \frac{3a_1a_3 - a_2^2}{a_1^2} \text{ و } q = \frac{2a_1^2a_4 - 3a_2a_3a_1 + a_2^2a_2}{a_1^3}$$

۲۲۵ - تحقیق در عده جوابها - تابع درجه سوم  
 $x^3 + px + q = 0$  ممکنست دارای یک یا کثریم و یک می نیم  
 باشد که طول آنها ریشه های مشتق  $x^2 + px = 0$  یا  $x_1 = 0$  یا  $x_2 = -p$  باشد .  
 میباشند . شرط وجود ما کثریم و می نیم اینست که  $\Delta > 0$  باشد .  
 باشد . اگر این شرط تحقق یابد و مقادیر ما کثریم و می نیم  
 تابع مختلف علامه باشند منحنی صعودی ها را در سه نقطه  
 قطع میکنند یعنی معادله  $x^3 + px + q = 0$  سه جواب دارد  
 اما اگر ما کثریم و می نیم منحنی علامه باشند معادله بیش از  
 یک جواب نخواهد داشت .  
 مقدار ما کثریم و می نیم چنین اند .

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{4p^3}{27}} + \sqrt[3]{\frac{q}{27} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{4p^3}{27}}} \text{ و } x_2 = -\sqrt[3]{\frac{4p^3}{27}} + \sqrt[3]{\frac{q}{27} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{4p^3}{27}}}$$

و حاصلضربشان  $\frac{2P^2}{27} - |q|$  می باشد.

پس هرگاه  $|q| = 27$ ،  $\frac{2P^2}{27} - |q| = 0$  معادله سه جواب دارد  
و  $|q| = 27$ ،  $\frac{2P^2}{27} - |q| > 0$  دو « (یکی مضاعف)  
و  $|q| = 27$ ،  $\frac{2P^2}{27} - |q| < 0$  یک «

۲۲۶ - حل معادله  $x^3 + px + q = 0$  از راه مثلثاتی

یادآوری می‌کنیم که  $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$

یا  $\cos 3\varphi = \frac{4}{3}\cos^3\varphi - \cos\varphi$  (۱)

اکنون در رابطه  $x^3 + px + q = 0$  بجای  $x$  مقدار  $\sqrt[3]{r}\cos\varphi$  را قرار می‌دهیم تا رابطه

$$\sqrt[3]{r}\cos 3\varphi = \frac{4}{3}\sqrt[3]{r}\cos^3\varphi - \sqrt[3]{r}\cos\varphi$$

(۲)

بدست آید. اگر  $\frac{4}{3}\sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{r}$  و  $\sqrt[3]{r} = 0$  یا  $r = 0$  باشد

فرض شوند یعنی  $\sqrt[3]{r} = 0$  و  $r = 0$  و  $\cos 3\varphi = \frac{4}{3}\cos^3\varphi - \cos\varphi$

باشند معادله (۲) تبدیل به معادله (۱) می‌شود.

از روی مقدار  $\cos 3\varphi$  نخست سه زاویه  $3\varphi$  و  $2\pi - 3\varphi$



و  $2\pi - 1 - 3\varphi$  را یافته  $\frac{1}{3}T$  آنها را در مقدار  $P = \frac{1}{3}\sqrt{27}$  ضرب می کنیم تا سه جواب معادله  $x^3 - 1 - 3x + 1 = 0$  بدست آیند. بدیهیست که شرط وجود جواب منفی بودن  $1 - 3x + 1 > 0$  میباشد.

مثال عددی -  $x^3 - 1 - 3x + 1 = 0$

$$P = \frac{1}{3}\sqrt{27} = \sqrt{3} = 1.73205$$

$$\cos 3\varphi = \frac{\sqrt{27} \times 1.73205}{27} = 0.15000$$

پس :

$$\varphi_1 = 20.0^\circ$$

$$\varphi_2 = 140.0^\circ$$

$$\varphi_3 = 100.0^\circ$$

یعنی

$$\cos \varphi_1 = 0.9396$$

$$\cos \varphi_2 = 0.7660$$

$$\cos \varphi_3 = 0.1736$$

و بالاخره

$$x_1 = 2.1798$$

$$x_2 = -1.7689$$

$$x_3 = 0.589$$

## مثلثات

### I کلیات

۱ - موضوع - هر مثلث دارای شش جزء (سه ضلع و سه زاویه) است که اگر سه تای آنها را بوضع مناسبی (در جوع شود به هندسه) داشته باشیم میتوانیم سه جزء دیگر را بدست آوریم.

در مثلثات قواعدی گفته میشوند که بتکمیل آنها از روی اجزاء معلوم اجزاء مثلث را میتوان حساب کرد.

۲ - اندازه قوس - برای اندازه گرفتن قوس دایره (یا زاویه مرکزی مقابل آن) سه واحد بکار میرود:

۱) درجه =  $\frac{1}{360}$  محیط دایره =  $\frac{1}{360}$  زاویه قائمه.

اجزاء آن : دقیقه =  $\frac{1}{60}$  درجه

ثانیه =  $\frac{1}{60}$  دقیقه =  $\frac{1}{3600}$  درجه

۲) گراد  $\frac{1}{\rho}$  محیط دایره  $\frac{1}{\rho}$  زاویه قائمه .

اجزاء آن : قوسی گراد  $\frac{1}{\rho}$  ، مسافتی گراد  $\frac{1}{\rho}$  ، میله‌ی گراد  $\frac{1}{\rho}$  گراد

۳) — رادیان — و آن قوسی است از دایره که طولش مساوی شعاع دایره باشد . پس محیط دایره برابر است با ۲ رادیان .

۳ — رادیان بین درجه ، گراد و رادیان اگر اندازه قوس  $ATB$  مساوی  $D$  درجه و  $G$  گراد و  $R$  رادیان باشد :

$$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180} = \frac{G}{360}$$

۴ — دایره مثال‌هایی — دایره ایست که شعاع آن مساوی واحد باشد :

۵ — دایره جهت‌دار — دایره‌ای که جهت مثبت یا منفی آن تعیین شده باشد دایره جهت‌دار میگویند .

اگر متحرکی از نقطه  $A$  واقع بر روی محیط دایره حرکت کند تا به نقطه  $B$  برسد گوئیم قوس  $AB$  را طی نموده است .  $A$  را مبدأ و  $B$  را مقصد میگویند . مسافت

مستترک پس از حرکت از نقطه  $A$  یا چند دور محیط دایره را طی کنند و در  $B$  متوقف شود در این صورت هم مستترک قوس  $AB$  را طی کرده است. اگر طول کوچکترین قوس  $AB$  مساوی  $\alpha$  رادیان باشد:

$$\alpha = 2K\pi \pm AB \text{ ق}$$

(  $K$  عددی است صحیح مثبت یا صفر یا منفی )

۶- قضیه شال - اگر نقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $\dots$  و  $K$  بر

روی محیط دایره واقع باشند:

$$2K\pi = FA \text{ ق} \pm ID \text{ ق} \pm CD \text{ ق} \pm BC \text{ ق} \pm AB \text{ ق}$$

اگر نقطه  $M$  واقع بر محیط دایره مبدأ قوسها،  $a$  و  $b$  طول

های قوسهای  $MA$  و  $NB$  و نقطه  $C$  وسط  $AB$  باشد.

$$b - a = 2K\pi \pm MC \text{ ق}$$

۷- تعریف - دو قوس را که دارای مبدأ مشترک باشند

قرینه گویند و قتیکه منتهای آن دو نسبت به دوری که از

مبدأ مشترک میگذرد قرینه باشند.

مجموع دو قوس قرینه مساویست با  $2K\pi$ .

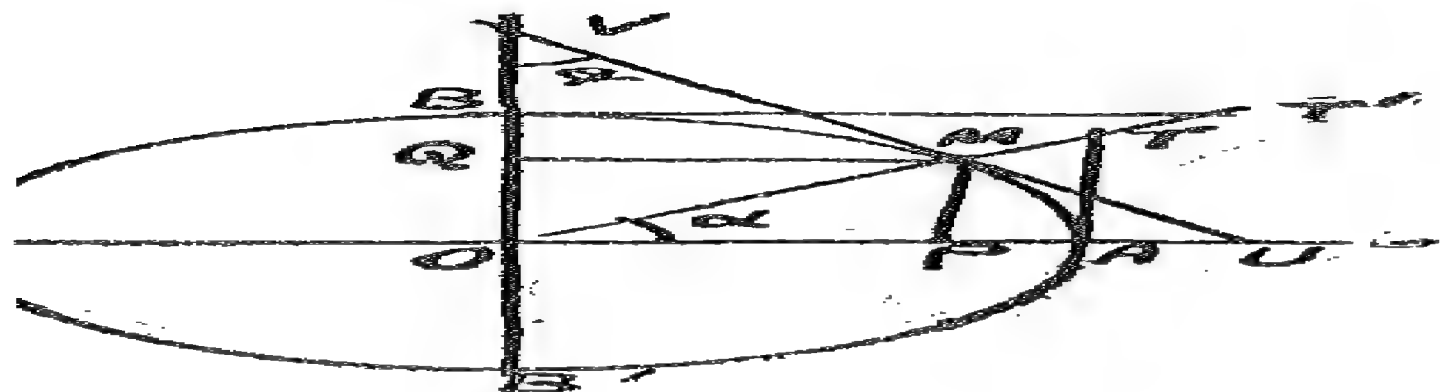
۸- تعریف - دو قوس را همگویی گویند و قتیکه مجموع

آنها مساوی ربع دایره یا  $\frac{\pi}{2}$  باشد.

۹- تعریف - دو قوس را مکمل گویند و قتی که

مجموعه شایسته مساوی نصف محیط دایره یا  $\pi$  باشد.

## II خطوط مثلثاتی



۱۰ - تعریف - اگر در دایره مثلثاتی قوس  $AM = a$  داده شده باشد و  $AA'$  قطر مار بر مبدأ  $A$  و  $BB'$  قطر عمود بر آن را رسم کنیم و عمودهای  $MP$  و  $MQ$  را بر آن دو قطر فرود آوریم و

امتداد شعاع  $OM$  مماس در نقطه  $A$  را در  $T$  و مماس در نقطه  $B$  را در  $T'$  قطع نماید و مماسی که از  $M$  بردایره رسم شود قطر  $AA'$  را در  $U$  و  $BB'$  را در  $V$  تلاقی کند :

۱)  $MP$  را جیب یا سنیوس  $a$  ( Sinus ) علامت اختصاری  $\sin a$

۲)  $OP$  را جیب تمام یا کسینوس  $a$  ( Cosinus ) علامت اختصاری  $\cos a$

۳)  $AT$  را ظل یا تانژانت  $a$  ( Tangente ) علامت اختصاری  $\tan a$

۴)  $BT'$  را ظل تمام یا کتانژانت  $a$  ( Cotangente ) علامت اختصاری  $\cot a$

(۵) OU را قاطع یا سکانت  $a$  (Secante) علامت اختصاری  $\sec a$

(۶) OV را قاطع تمام یا کوسکانت  $a$  (cosecante) علامت اختصاری  $\csc a$

مینامند. و هر شش خط را خطوط مثلثاتی قوس  $a$  میگویند.  
۱۱ - قضیه - وقتی قوس  $a$  از ۰ تا ۳۶۰ درجه تغییر نماید:

جیب و جیب تمام آن بین ۱ - و ۱ + ، و ظل و ظل تمام و قاطع و قاطع تمام آن بین  $-\infty$  و  $+\infty$  تغییر مینمایند.  
۱۲ - روابط بین خطوط مثلثاتی قوس  $a$  -

$$(۱) \sin^2 a + \cos^2 a = ۱$$

$$(۲) \operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

$$(۳) \operatorname{colg} a = \frac{\cos a}{\sin a}$$

$$(۴) \sec a = \frac{۱}{\cos a}$$

$$(۵) \csc a = \frac{۱}{\sin a}$$

روابطی که از روابط فوق نتیجه میشوند.

$$\cos a = \frac{۱}{\pm \sqrt{۱ + \operatorname{tg}^2 a}}$$

$$۱ + \operatorname{colg}^2 a = \frac{۱}{\sin^2 a}$$

$$\sin a = \frac{\operatorname{tg} a}{\pm \sqrt{۱ + \operatorname{tg}^2 a}}$$

$$۱ + \operatorname{tg}^2 a = \frac{۱}{\cos^2 a}$$

۱۲ — روابط بین خطوط مثلثاتی قوسهای یکتا

تفاضل یا مجموعشان مضرب بی از  $\pi$  باشد. (  $k$  عددی است بزرگتر یا کوچکتر از صفر یا مساوی آن )

۱ — اگر  $a - b = k\pi$  ( تفاضل دو قوس مضرب زوج  $\pi$  ) باشد :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin a = \sin ( \sqrt{k\pi} + b ) = \sin b \\ \cos a = \cos ( \sqrt{k\pi} + b ) = \cos b \\ \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} ( \sqrt{k\pi} + b ) = \operatorname{tg} b \end{array} \right.$$

۲ — اگر  $a - b = \sqrt{k\pi}$  ( مجموع دو قوس مضرب زوج  $\pi$  ) باشد :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin a = \sin ( \sqrt{k\pi} - b ) = -\sin b \\ \cos a = \cos ( \sqrt{k\pi} - b ) = \cos b \\ \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} ( \sqrt{k\pi} - b ) = -\operatorname{tg} b \end{array} \right.$$

۳ — اگر  $a - b = ( \sqrt{k+1} ) \pi$  ( تفاضل مضرب فرد  $\pi$  ) باشد :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin a = \sin [ ( \sqrt{k+1} ) \pi + b ] = -\sin b \\ \cos a = \cos [ ( \sqrt{k+1} ) \pi + b ] = -\cos b \\ \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} [ ( \sqrt{k+1} ) \pi + b ] = \operatorname{tg} b \end{array} \right.$$

۴ — اگر  $a + b = ( \sqrt{k+1} ) \pi$  ( مجموع مضرب فرد  $\pi$  ) باشد :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin a = \sin [ ( \sqrt{k+1} ) \pi - b ] = \sin b \\ \cos a = \cos [ ( \sqrt{k+1} ) \pi - b ] = -\cos b \\ \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} [ ( \sqrt{k+1} ) \pi - b ] = -\operatorname{tg} b \end{array} \right.$$

۱۴- در قوسهای متمم  $\epsilon$  یعنی اگر  $a + b = \frac{\pi}{2}$  باشد :

$$\sin a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \cos b$$

$$\cos a = \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin b$$

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \operatorname{ctg} b$$

اگر تفاضل دو قوس يك قائمه باشد  $a - b = \frac{\pi}{2}$

$$\sin a = \sin\left(\frac{\pi}{2} + b\right) = \cos b$$

$$\cos a = \cos\left(\frac{\pi}{2} + b\right) = -\sin b$$

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + b\right) = -\operatorname{ctg} b$$

۱۵- روابط بين قوسهایی كه يك خط مثلثاتی داشته باشند :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 2k\pi + b \\ a + (2k + 1)\pi = b \end{array} \right. : \sin a = \sin b \text{ اگر } 1 -$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 2k\pi + b \\ a = 2k\pi - b \end{array} \right. : \cos a = \cos b \text{ اگر } 2 -$$

$$a = k\pi + b : \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} b \text{ اگر } 3 -$$



## ۱۶ - جدول مثلاثاتی بر خی قوسهای مهم :

cos	tg	cos	sin	قوس
$\infty$	۰	۱	۰	۰
$\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$
۱	۱	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	۱	$\frac{1}{2}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$
۰	$\infty$	۰	۱	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$

## ۱۷ - دوره تناوب خطوط مثلاثاتی

خطوط مثلاثاتی قوابع متناوب (جبر ، شماره ۱۵۲) قوس هستند ، دوره تناوب جیب و جیب تمام و قطر ظل و قطر ظل تمام  $2\pi$  و دوره تناوب ظل و ظل تمام  $\pi$  میباشد .

## III - جمع و تفریق و ضرب و تقسیم قوسها

۱۸ - تصویر بر محور - هرگاه  $a$  طول قطعه خط AB و زاویه آن با جهت مثبت محور و  $a'$  تصویر آن بر محور باشد :

$$a' = a \cos \alpha$$

۱۹ — خطوط مثلثاتی مجموع یا تفاضل دو قوس

$$\sin (a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad \text{مجموع}$$

$$\cos (a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\operatorname{tg} (a+b) = \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb}}{1 - \operatorname{tga} \operatorname{tgb}}$$

$$\sin (a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \quad \text{ب — تفاضل}$$

$$\cos (a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\operatorname{tg} (a-b) = \frac{\operatorname{tga} - \operatorname{tgb}}{1 + \operatorname{tga} \operatorname{tgb}}$$

۲۰ — مجموع سه قوس :

$$\sin (a+b+c) = \sin [(a+b)+c] =$$

$$\sin a \cos b \cos c + \sin b \cos a \cos c + \sin c \cos a \cos b$$

$$- \sin a \sin b \sin c$$

$$\cos (a+b+c) = \cos a \cos b \cos c - \cos a \sin b \sin c$$

$$- \cos b \sin a \sin c - \cos c \sin a \sin b$$

$$\operatorname{tg} (a+b+c) = \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb} + \operatorname{tgc} - \operatorname{tga} \operatorname{tgb} \operatorname{tgc}}{1 - \operatorname{tga} \operatorname{tgb} - \operatorname{tgb} \operatorname{tgc} - \operatorname{tga} \operatorname{tgc}}$$

۲۱ — خطوط مثلثاتی قوسهایی که مضرب یک

قوس هستند :

۱ — قوسهای دو برابر :

## مثلثات

$$\sin \gamma a = \gamma \sin a \cos a$$

$$\cos \gamma a = \cos^{\gamma} a - \sin^{\gamma} a = \gamma \cos^{\gamma-1} a - 1 = 1 - \gamma \sin^{\gamma} a$$

$$\lg \gamma a = \frac{\gamma \lg a}{1 - \lg^{\gamma} a}$$

۲ - قوسهای سه برابر:

$$\sin \gamma a = \gamma \sin a - 2 \sin^{\gamma} a$$

$$\cos \gamma a = 2 \cos^{\gamma} a - \gamma \cos a$$

$$\lg \gamma a = \frac{\gamma \lg a - \lg^{\gamma} a}{1 - \gamma \lg^{\gamma} a}$$

۳ - قوسهای پنج برابر:

$$\sin 5a = 5 \sin a - 2 \sin^{\gamma} a - 1 \sin^5 a$$

$$\cos 5a = 1 \cos^5 a - 2 \cos^{\gamma} a - 5 \cos a$$

۲۲ - خطوط مثلثاتی یک قوس بر حسب ظل نصف آن

$$\sin a = \frac{\gamma \lg \frac{a}{\gamma}}{1 + \lg^{\gamma} \frac{a}{\gamma}}, \quad \cos a = \frac{1 - \lg^{\gamma} \frac{a}{\gamma}}{1 + \lg^{\gamma} \frac{a}{\gamma}}, \quad \lg a = \frac{\gamma \lg \frac{a}{\gamma}}{1 - \lg^{\gamma} \frac{a}{\gamma}}$$

۲۳ - خطوط مثلثاتی یک قوس بر حسب جیب دو برابر آن

$$\sin a = \frac{1}{\gamma} \left( \pm \sqrt{1 - \sin^2 \gamma a} \pm \sqrt{1 - \sin^2 \gamma a} \right)$$

$$\cos a = \frac{1}{\gamma} \left( \pm \sqrt{1 - \sin^2 \gamma a} \pm \sqrt{1 - \sin^2 \gamma a} \right)$$

۲۴- خطوط مثلثاتی يك قوس بر حسب جیب تمام دو برابر آن

$$\sin a = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2a}{2}}$$

$$\cos a = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{2}}$$

۲۵- محاسبه  $\lg a$  بر حسب  $\lg 2a$ 

$$\lg a = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \lg^2 2a}}{\lg 2a}$$

## ۱۷- لگاریتمی کردن

۲۶- درجهبر دیده‌ایم که لگاریتم حاصلضرب (یا خارج

قسمت) چند مقدار برابر است با مجموع (یا تفاضل) لگاریتم های آنها .

چون در جداول لگاریتم بجای خطوط مثلثاتی قوسهای مختلف لگاریتمهای آن خطوط را داده‌اند اغلب محتاج با استفاده از لگاریتم خطوط بجای خود آنها هستیم . بنا براین باید سعی کنیم تا هر جا که ممکن است بجای مجموع یا تفاضل خطوط مثلثاتی حاصلضرب یا خارج قسمت آنها را بدست آوریم . این عمل ، یعنی تبدیل مجموع یا تفاضل خطوط مثلثاتی به حاصلضرب یا خارج قسمت ، را لگاریتمی کردن یا قابل محاسبه کردن آنها میگویند .

۱۷- تبدیل مجموع یا تفاضل دو خط مثلثاتی

به حاصلضرب :

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

۱)

$$۱) \quad \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$۲) \quad \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$۳) \quad \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$۴) \quad \tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$۵) \quad \tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

$$۶) \quad \cos p - \sin q = 2 \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{p+q}{2} \right) \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{p-q}{2} \right)$$

$$۷) \quad \sin p + \cos q = 2 \sin \left( \frac{\pi}{2} + \frac{p-q}{2} \right) \cos \left( \frac{p+q}{2} - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$۸) \quad 1 + \sin a = 2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{a}{2} \right) = 2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{a}{2} \right)$$

$$۹) \quad 1 - \sin a = 2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{a}{2} \right) = 2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{a}{2} \right)$$

$$۱۰) \quad 1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$$

$$۱۱) \quad 1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}$$

۲۸ - تبدیل حاصل ضرب دو خط مثلثاتی به مجموع

یا تفاضل :

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos (a-b) - \cos (a+b)]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos (a-b) + \cos (a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin (a-b) + \sin (a+b)]$$

۲۹ — تبدیل برخی عبارات مثلثاتی به حاصلضرب

(۱) برای تبدیل عبارت  $a \cos x + b \sin x$  فرض میکنیم

$$\frac{b}{a} = \tan \varphi \quad \text{باشد}$$

$$a \cos x + b \sin x = a \left( \cos x + \frac{b}{a} \sin x \right) \quad \text{پس}$$

$$= a (\cos x + \tan \varphi \sin x) = \frac{a}{\cos \varphi} \cos (x - \varphi)$$

(۲) برای تبدیل عبارت  $a + b \sin x$  فرض میکنیم  $\frac{b}{a} = \tan^2 \varphi$

باشد : پس

$$a + b = a \left( 1 + \frac{b}{a} \right) = a (1 + \tan^2 \varphi) = \frac{a}{\cos^2 \varphi}$$

(۳) برای تبدیل  $a - b \sin x$  فرض میکنیم  $\frac{b}{a} = \sin^2 \varphi$  باشد :

$$a - b = a (1 - \sin^2 \varphi) = a \cos^2 \varphi \quad \text{پس}$$

(۴) برای تبدیل  $\frac{a-b}{a+b}$  فرض میکنیم  $\varphi$   $\lg \frac{b}{a}$  باشد :

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{1-\lg \varphi}{1+\lg \varphi} = \lg \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \quad \text{پس}$$

(۵) برای تبدیل  $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$  فرض میکنیم  $\varphi$   $\cos \varphi = \frac{b}{a}$  باشد :

$$\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} = \sqrt{\frac{1-\cos \varphi}{1+\cos \varphi}} = \lg \frac{\varphi}{2} \quad \text{پس}$$

(۶) حل معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  از راه مثلاثات :

اگر فرض کنیم  $x = \lg \varphi$  ، معادله باینصورت در میآید

$$a = c + b \sin 2\varphi + (c-a) \cos 2\varphi = 0$$

برای حل این معادله و تعیین  $\varphi$  مرأجه شود به حل معادلات مثلاثاتی (شماره ۳۴)

۷ روابط بین اجزاء مثلاث

۲۰ — در مثلاث قائم

$$A = \frac{\pi}{2} \quad B + C = \frac{\pi}{2} \quad (۱)$$

$$b = a \sin B = a \cos C = c \lg B = a \cot \lg C \quad (۲)$$

$$c = a \sin C = a \cos B = b \lg C = b \cot \lg B \quad (۳)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (۴)$$

$$\lg \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{a-c}{a+b}} \quad \lg \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+c}} \quad (۵)$$

۴۹. دو مثلث غیر مشخص

(شعاع دایره محیطی  $R$ )

$$A + B + C = 2\pi \quad (۱)$$

$$(I) \text{ دستگاه } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad (۲)$$

$$(II) \text{ دستگاه } \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases} \quad (۳)$$

$$(III) \text{ دستگاه } \begin{cases} a = b \cos C + c \cos B \\ b = a \cos C + c \cos A \\ c = b \cos A + a \cos B \end{cases} \quad (۴)$$

۴۴. روابط بین اضلاع و زوایای مثلث باشد

دوایره محیطی و محیطی

( $R$  شعاع دایره محیطی،  $r$  شعاع دایره محیطی،  $r_a$ ،

$r_b$  و  $r_c$  اشعه دایره محیطی خارج،  $a$  و  $b$  و  $c$  اضلاع،  $p$  محیط)

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$



$$r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$$

$$r_b = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}}$$

$$r_c = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}$$

$$r = (p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = (p-b) \operatorname{tg} \frac{B}{2} = (p-c) \operatorname{tg} \frac{C}{2}$$

رر — مساحت مثلث

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$S = pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S = \sqrt{r r_a r_b r_c}$$

$$S = \frac{abc}{2R}$$

$$S = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin A} = \frac{1}{2} b^2 \frac{\sin A \sin C}{\sin B}$$

$$= \frac{1}{2} c^2 \frac{\sin A \sin B}{\sin C}$$

(٩٩) ارتفاعات مثلث

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= b \sin C = c \sin B = \frac{a \sin B \sin C}{\sin A}$$

$$h_b = \frac{\gamma}{b} \sqrt{\dots} = a \sin C = c \sin A = \frac{b \sin A \sin C}{\sin B}$$

$$h_c = \frac{\gamma}{c} \sqrt{\dots} = a \sin B = b \sin A = \frac{c \sin A \sin B}{\sin C}$$

۳۵ — منصف زاویه‌ها - اگر  $l_a$  و  $l_b$  و  $l_c$  منصف

زاویه‌های داخلی  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $\lambda_a$  و  $\lambda_b$  و  $\lambda_c$  منصف زاویه

های خارجی  $T$  آنها باشند :

$$l_a = \frac{\gamma}{b+c} \sqrt{bc(p-a)} = \frac{b \sin C}{\cos \frac{B+C}{2}} = \frac{c \sin B}{\cos \frac{B+C}{2}} = \frac{a \sin B \sin C}{\sin A \cos \frac{B+C}{2}}$$

$$l_b = \dots \quad l_c = \dots$$

$$\lambda_a = \frac{\gamma}{b-c} \sqrt{bc(p-b)(p-c)} = \frac{b \sin C}{\sin \frac{B-C}{2}} = \frac{c \sin B}{\sin \frac{B-C}{2}} = \frac{a \sin B \sin C}{\sin A \sin \frac{B-C}{2}}$$

$$\lambda_b = \dots \quad \lambda_c = \dots$$

۳۶ — میانه‌ها

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$$

$$r_c = \frac{1}{2} \sqrt{4(R^2 - p^2) - a^2}$$

۳۷ - دو دایره یون اجزاء مختلف

$$h_a = \frac{1}{2} \sqrt{4(R^2 - p^2) - a^2} \quad (1)$$

$$h_b = \frac{1}{2} \sqrt{4(R^2 - p^2) - b^2} \quad (2)$$

$$h_c = \frac{1}{2} \sqrt{4(R^2 - p^2) - c^2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \quad (4)$$

$$\varepsilon R = r_a + r_b + r_c - r \quad (5)$$

$$4R^2 = r^2 + r_b^2 + r_a^2 + r_c^2 + a^2 + b^2 + c^2 \quad (6)$$

(۷) اگر  $O$  مرکز دایره محیطی و  $I$  مرکز دایره محاطی و  $H$  محل تلاقی ارتفاعات باشد،

$$OH^2 = R^2 (1 - \cos A \cos B \cos C)$$

$$OI^2 = R(R - 2r)$$

$$abc = \varepsilon prR \quad (8)$$

## VI معادلات مثلثاتی

۳۸ - معادله مثلثاتی بیان تساوی بین دو عبارتست.

که هر يك شامل يك خط یا چند خط مثلثاتی يك یا چند قوس باشند

و تساوی آنها بازنه برخی ازمقادیر این قوسها محقق گردد. این مقادیر را جواب های معادله مثلثاتی گویند.

۳۹ - معادله یک مجهولی آنست که فقط یک قوس یا مضارب آن در آن مجهول باشند. اگر مقدار قوسهای مجهوله از یک یا دو کثیر باشد معادله چند مجهولی خواهد بود.

۱ - به معادله یک مجهولی - بر دو نوع است :

۱ - نوع اول - معادله ای که فقط شامل یک خط

مثلثاتی قوس مجهول باشد : برای حل آن باید همان خط مثلثاتی را مجهول معاون قرار داد و معادله را بطریق دیگری حل نمود. پس از بدست آمدن مقدار مجهول قوسهای متناظر با آن خط مثلثاتی جوابهای مسئله اند.

مثلا در معادله  $\sin x = \frac{1}{2}$  پس از حل  $\frac{1}{2} = \sin x$  در

میشود. پس  $x = \frac{\pi}{6}$  و در نتیجه  $x = \frac{\pi}{6} \pm 2k\pi$  در

۱ - نوع دوم - معادله ای که شامل چندین خط

مثلثاتی قوس مجهول باشد :

برای حل آن باید یکی از خطوط مثلثاتی را مجهول معاون قرار داد و سایر خطوط مثلثاتی را با آن خط تبدیل و مطابق حالت اول عمل نمود.

در معادلات نوع دوم برای انتخاب مجهول معاون از قاعده بیوش میتوان استفاده نمود :

۲ - قاعده بیوش Bioche - ۱ - اگر در معادله ای

مشكلات:

قوس  $x$  را به  $(x - \pi)$  تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند  $\sin x$  را مجهول معاون بگیریم.

۲ - اگر در معادله قوس  $x$  را به  $(x - \pi)$  تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند  $\sin x$  را مجهول معاون قرار می‌دهیم.

۳ - هرگاه در معادله قوس  $x$  را به  $(x + \pi)$  تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند  $\sin x$  را مجهول معاون قرار می‌دهیم.

۴ - اگر  $x$  را به  $(x - \pi)$  و  $(x + \pi)$  و  $(x + \frac{\pi}{2})$  تبدیل کردیم و در هر سه حال معادله تغییر کرد، باید  $\frac{x}{2}$  را مجهول معاون قرار داد.

۴۳ - حل معادلات کلاسیک - غیر از طریق مذکور اغلب ممکن است معادلات مثلثاتی را بکمک دستورات مثلثاتی برآمدهایی که آسان تر باشد حل نمود. برای نمونه طریقه حل معادلات معروف بکلاسیک را بیان میکنیم.

(۱) - حل معادله کلاسیک  $\sin x + \cos x = c$   $\sin x + \cos x = 1$   $\sin x + \cos x = 0$  (۱)

حل ۱ - اگر  $a$  و  $b$  و  $c$  عددی باشند  $\frac{b}{a}$  را  $\sin \phi$  فرض میکنیم تا معادله باینصورت درآید:

$$\sin x + \sin \phi = c$$

$$\sin x + \sin \phi = c$$

چون طرف دوم مقدار یست معلوم  $\varphi + x - x$  و در نتیجه  $x$  بدست می آید .

بحث - شرط وجود جواب این است که  $1 \geq \cos^2 \varphi \frac{c^2}{a^2}$

باشد : یا چون بجای  $\cos^2 \varphi$  مقدار آن را بر حسب  $a$  و  $b$  قرار دهیم :

$$c^2 \leq a^2 + b^2$$

حل ۴ - اگر  $a$  و  $b$  و  $c$  پارامتری باشند  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$  را مجهول

معاون انتخاب میکنیم تا معادله (۱) بصورت معادله درجه دوم

$$b^2 = 0 \quad c - b = 0 \quad 2a \frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2} = 0 \quad (1) \quad (b^2 + c)$$

در آید که در آن شرط وجود جواب ، مثبت یا مساوی صفر بودن مبین است ، یعنی

$$c^2 \leq a^2 + b^2$$

(۱) حل معادله کلاسیک  $c \cot y x + b \cot y x = a$

حل ۵ - اگر ضرایب  $a$  و  $b$  و  $c$  عددی باشند معادله

مفروض را چنین مینویسیم :

$$a \frac{\sin x}{\cos x} + b \frac{\cos x}{\sin x} = c$$

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x - c \sin x \cos x = 0 \quad \text{و یا}$$

$$a \frac{1 - \cos^2 x}{2} + b \frac{1 + \cos^2 x}{2} - c \frac{\sin 2x}{2} = 0 \quad \text{و یا}$$

$$c \sin^2 x + (a - b) \cos^2 x = a + b \quad \text{یعنی}$$

که مانند مسئله ۱ حل می‌شود.

حل ۳ - اگر لا اقل یکی از ضرایب پارامتری باشند،  $a$  و  $b$  را مجهول می‌گیریم و معادله باینصورت درمی‌آید:

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x = c$$

### ۱۱۱ حل معادله کلاسیک

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$$

حل ۱ - اگر ضرایب عددی باشند معادله را می‌توان با اینصورت نوشت:

$$b \sin^2 x + (c - a) \cos^2 x = d - a - c$$

حل ۲ - اگر لا اقل یکی از ضرایب پارامتری باشند طرف دوم معادله را در  $\cos^2 x$  ضرب و طرفین معادله حاصل را بر  $\cos^2 x$  تقسیم می‌کنیم تا معادله

$$a \tan^2 x + b \tan x + c = d (1 + \tan^2 x)$$

$$(a - d) \tan^2 x + b \tan x + (c - d) = 0$$

و یا حاصل شود که با آسانی می‌توان آنرا حل و بحث نمود.

### ۱۷ حل معادله کلاسیک $\sin p x = \sin q x$

حل - اگر  $p$  و  $q$  عددی باشند

$$\begin{cases} pX = 2k\pi + qX \\ pX = (2k + 1)\pi + qX \end{cases}$$

$$x = \frac{(2k + 1)\pi}{p - q} \quad \text{یا} \quad x = \frac{2k\pi}{p - q} \quad \text{یعنی}$$

ب — معادلات چند مجهولی

۴۴ — بدیهیست که بتعداد مجهولها باید معادله داده شده باشد. پس دستگاههای معادلات چند مجهولی خواهم داشت. برای حل دستگاههای معادلات چند مجهولی مثلثاتی قاعده معینی نمیتوان گفت جز اینکه اصولاً معادلات چند مجهولی یا استفاده از قواعد جبری و راه حلهایی که برای حل معادلات یک مجهولی و انتخاب مجهول معاون گفته شده است حل میشوند.

۴۵ — هرگاه در دستگاه علاوه بر خطوط مثلثاتی خود قوسها هم وجود داشته باشند اشکال زیادتر است. آنها در دستگاههای دو مجهولی که مجموع یا تفاضل دو قوس و مجموع، تفاضل، حاصلضرب یا خارج قسمت دو خط داده شده باشند یا کمک دستورهایی شماره ۲۷ و ۲۸ میتوان مسائل را آسانی حل کرد. اینک چند نمونه:

۱) دستگاههایی که در آن مجموع یا تفاضل دو قوس و مجموع یا تفاضل دو جیب یا دوجیب تمام داده شده باشند:

$$\begin{cases} x + y = a \\ \sin x + \sin y = b \end{cases}$$

مثال



از رابطه

$$x = \frac{a}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \quad \text{و} \quad y = \frac{a}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}$$

تفاضل  $y$  و  $x$ ، و از روی مجموع و تفاضل دو مجهول خود آنها را بدست میآوریم.

( II ) دستگاههایی که مجموع و تفاضل دو خط مثلثاتی را شامل باشند :

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = a \\ \sin x + \sin y = b \end{cases}$$

مثال

هر معادله دستگاه را جداگانه لگاریتمی کرده و حاصل را بهم تقسیم میکنیم نتیجه میشود :

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$$

و از روی آن  $y + x$  بدست میآید. آنگاه مقدار  $\frac{a}{2}$

را در یکی از معادلات لگاریتمی شده دستگاه برده  $y - x$  را بدست میآوریم.

( III ) مجموع یا تفاضل دو قوس و حاصل ضرب دو جیب یا درجیب تمام در دست هستند :

$$\begin{cases} x + y = a \\ \sin x \sin y = p \end{cases}$$

مثال

معادله دوم را بحاصلجمع و تفاضل قوسها تبدیل کرده  
 از روی آن  $x - y$  را بدست میآوریم .  
 IV - علاوه بر مجموع یا تفاضل دوقوس خارج قسمت دو  
 در خط از یکتو در دست هستند :

$$\begin{cases} x + y = a \\ \frac{\sin x}{\sin y} = b \end{cases} \quad \text{مثال}$$

معادله دوم را ترکیب و تفصیل نسبت میکنیم :

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\cot y}{\cot x} = \frac{a + 1}{a - 1}$$

پس  $x - y$  بدست میآید .

V - اگر علاوه بر مجموع یا تفاضل دوقوس مجموع،  
 تفاضل، حاصلضرب یا خارج قسمت دو ظل یا دو ظل تمام آنها  
 داده شده باشند مسئله با مختصر تصرفی مانند نمونه‌های I تا  
 IV قابل حل میشود .

$$\begin{cases} x + y = a \\ \lg x + \lg y = s \end{cases} \quad \text{مثال}$$

$$\lg x + \lg y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} =$$

$$\frac{\sin(x+y)}{\frac{1}{2} \left[ \cos \frac{x+y}{2} + \cos \frac{x-y}{2} \right]} = \frac{\sin a}{\cos \frac{a}{2} + \cos \frac{x-y}{2}}$$

از  $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \pi$  میتوان  $\pi - x$  را بدست آورد.

### VII نامعادلات مثلثاتی

۴۶ - برای حل نامعادله مثلثاتی باید طریقه حل نامعادلات جبری را بکار برد یعنی جمیع جمل را بیکطرف نامعادله نقل کرد و پس از انجام اعمال لازم عبارت را بهاصل ضرب عوامل تجزیه و علامت هر عامل را در فواصل جوابها تحقیق کرد و از مقایسه علامت، جوابهای نامعادله را تعیین نمود.

مثال - برای حل نامعادله  $\sqrt{3} - 2 \sin x \geq 0$  یا  $2 \sin x \leq \sqrt{3}$  یا  $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$  باشد ابتدا آن را مساوی صفر قرار میدهیم و

جوابهایش را که عبارتند از  $x = \frac{\pi}{3}$  و  $x = \frac{2\pi}{3}$  (جوابهای بین صفر و  $2\pi$ ) بدست آورده جدول ذیل را تشکیل میدهیم:

$x$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$2\pi$
$\sqrt{3} - 2 \sin x$	+	+	+
جواب ندارد	جواب دارد	جواب دارد	جواب ندارد

پس نامعادله با  $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$  صادق است.

### VIII حل مثلث

۴۷ - حل مثلث یعنی بدست آوردن اجزاء مجهول آن

از روی اجزاء معلوم بوسیله محاسبه .  
 ۴۸ - اگر اجزاء معلوم از اجزاء اصلی مثلث ( اضلاع و زوایا ) باشند میگویند يك حالت کلاسیک است و اگر از اجزاء فرعی ( اشعه دواير ، ارتفاعات و مانند آنها ) باشند، يك حالت غیر کلاسیک .

۴۹ - روابط بین اجزاء اصلی مثلث قائم در شماره ۳۰ ( ۱ تا ۳ ) و روابط بین اجزاء اصلی مثلث غیرمستقیم در شماره ۳۱ ( دستگاههای I و II و III ) گفته شده است . و نیز روابط بین سایر اجزاء مثلثها در شماره های ۳۲ تا ۳۷ درج گردیده اند .  
 ۵۰ - تعادل دستگاهها - در هر مثلث دستگاههای A و II و III ( شماره ۳۱ ) متعادلد یعنی هر يك را میتوان از روی دیگری بدست آورد .

مثلا برای بدست آوردن دستگاه II از دستگاه A باین طریق عمل میکنیم :

$$\begin{aligned} A & \equiv \pi - (B + C) \\ \sin A & \equiv \sin(B + C) \equiv \sin B \cos C + \cos B \sin C \\ & \equiv \sin B \cos C + \cos B \sin C \\ & \equiv \sin B (\cos C) + \cos B (\sin C) \\ & \equiv \sin B \cos C + \cos B \sin C \\ & \equiv \sin B \cos C + \cos B \sin C \end{aligned}$$

و چون بجای  $\sin A$  و  $\sin B$  و  $\sin C$  بترتیب مقادیرشان

$\frac{a}{\sqrt{R}}$  و  $\frac{b}{\sqrt{R}}$  و  $\frac{c}{\sqrt{R}}$  را که از دستگاه I بدست می‌آیند قرار دهیم  
رابطه اول دستگاه II نتیجه میشود .

۵۹ — حل مثلث قائم در حالات کلاسیک

اجزاء معلوم	اجزاء مجهول	فرمولهایی که باید بکار برد
حالت اول $a, B$	$c, b, C$	$C = 90^\circ - B$ $b = a \sin B$ $c = a \cos B$
حالت دوم $b, B$	$c, a, C$	$C = 90^\circ - B$ $c = b \cot B$ $a = \frac{b}{\sin B}$
حالت سوم $b, a$	$c, C, B$	$\sin B = \frac{b}{a}$ $C = 90^\circ - B$ $c = a \sin B$
حالت چهارم $c, b$	$a, C, B$	$\lg B = \frac{b}{c}$ $C = 90^\circ - B$ $a = \frac{b}{\sin B}$

۵۴ - حل مثلث غیر قائم در حالات کلاسیک

فرمول‌هایی که باید به کار برد	اجزاء معلوم	اجزاء مجهول	حالت اول
$A = \pi - (B + C)$ $b = a \frac{\sin B}{\sin A}$ $c = a \frac{\sin C}{\sin A}$	$a, A, c$	$b, B$	
$\begin{cases} \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{b}{a} \\ B + A = \pi - C \end{cases}$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$	$A, c, B$	$b, a$	حالت دوم
$\sin B = \frac{b}{a} \sin A$ $C = \pi - (A + B)$ $c = a \cos B + b \cos A$	$C, B, c$	$A, a$	حالت سوم
$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ $\sin B = \frac{b}{c} \sin C$ $A = \pi - (B + C)$	$C, B, A$	$c, a$	حالت چهارم

۵۵ - حل مثلث در حالات غیر کلاسیک - این حالات

بسیار متنوعند و بطور کلی قاعده‌ای برای آنها نمیتوان گفت فقط دو نکته اساسی ذیل، خاطر نشان میشوند .

۱ - در حل و بحث مسائل بهتر است صکه از محاسبه زوایا شروع شود ، زیرا اضلاع از روی زوایا به آسانی بدست میآیند .

۲ - هر جا مجموع دو مجهول معلوم باشد خوبست تفاضل آن دو را نیز بدست آورد تا به آسانی بتوان آن ها را پیدا کرد .

### ۱-۲- چهار بره‌های گوژ



(ش ۲)

۵۴ - هر چهار بر گوژ (محدب) چهار ضلع و چهار زاویه دارد که فرض معلوم بودن پنج‌تای آنها، بشرط آنکه اقلا دوتای آنها ضلع باشند ، میتوان چهار بر را حل و رسم کرد . در چهار بر  $ABCD$  (ش ۲) زوایا را به  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  و اضلاع را  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  نمایش میدهند .

برای محاسبه اجزاء مجهول چهار بر از روی اجزاء معلوم آن ، آنرا بوسیله رسم دوقطر به مثلثها تجزیه میکنیم و اجزاء مجهول را حساب میکنیم .

۵۵ - مسئله . از چهار بری چهار ضلع و يك زاویه معلومست . زوایای دیگر را حساب کنید .

چون اقطار را  $m$  و  $n$  بنامیم (ش ۲) :  
 در مثلث  $DAI$  میتوان  $n$  را حساب کرد ( شماره ۵۲ ،  
 حالت دوم) و از روی آن زاویه  $C$  را بدست آورد (شماره ۵۲  
 حالت چهارم) . و نیز از حل دو مثلث  $ADI$  و  $DCI$  زوایای  $ADI$   
 و  $DCI$  که مجموعشان زاویه  $D$  است بدست میآید و زاویه  $E$   
 از رابطه  $2\pi = D + C + B + A$  (هندسه) بدست میشود .

۵۶ - زوایای بین اجزاء چهار بر محاطی

$$1 - \text{زوایا} \quad A + C + B + D = \pi$$

$$m \quad \frac{A}{2} \quad \frac{C}{2} \quad \frac{B}{2} \quad \frac{D}{2}$$

$$m \quad \frac{A}{2} \quad \frac{C}{2} \quad \frac{B}{2} \quad \frac{D}{2}$$

$$n \quad \frac{A}{2} \quad \frac{C}{2} \quad \frac{B}{2} \quad \frac{D}{2}$$

$$n \quad \frac{A}{2} \quad \frac{C}{2} \quad \frac{B}{2} \quad \frac{D}{2}$$

$$m \quad \frac{A}{2} \quad \frac{C}{2} \quad \frac{B}{2} \quad \frac{D}{2}$$

$$m \quad \frac{A}{2} \quad \frac{C}{2} \quad \frac{B}{2} \quad \frac{D}{2}$$

$$m \quad \frac{A}{2} \quad \frac{C}{2} \quad \frac{B}{2} \quad \frac{D}{2}$$

$$\sqrt{S_3}$$



$$\sin \alpha = \frac{KS}{mn}$$

۵ - زاویه بین دو قطر

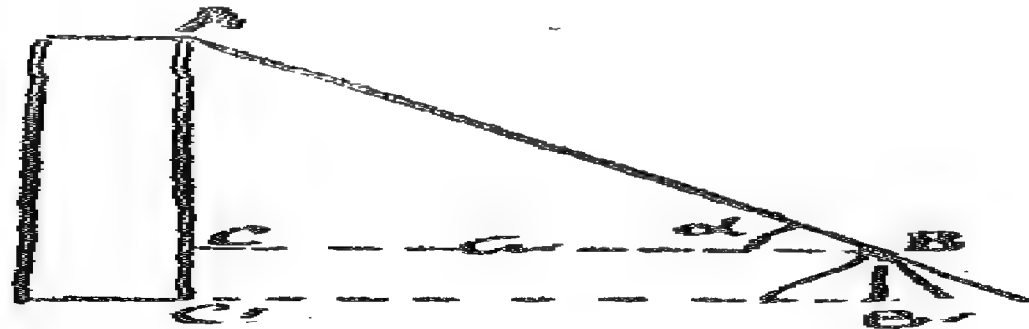
### ۳ - استعمال مثلثات در نقشه برداری

۵۷ - در نقشه برداری از يك قطعه زمین میتوان طول خطوط و مقدار زوایا را بازنجیر مساحی و زاویه یاب و افزار دیگر اندازه گرفت. ولی برای مراعات دقت زمین را بمثلثهای متعدد تقسیم میکنند و بوسیله حل آن مثلثها اجزاء آن را با کمال دقت اندازه می گیرند. این عمل را مثلث بندی یا Triangulation می گویند.

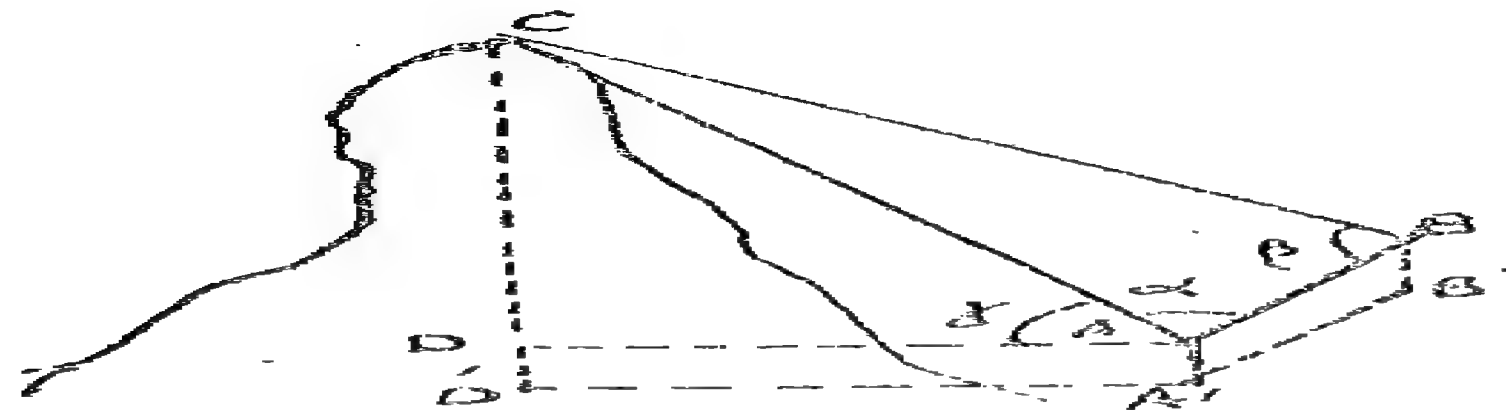
۵۸ - گاهی نیز اندازه گرفتن فاصله بین دو نقطه که در دسترس نیستند یا اندازه گرفتن ارتفاعی لازم می آید. این مسائل بطریق ذیل حل میشوند.

۵۹ - تعیین ارتفاع - ۱) اگر بموقع قائمی که بر نقطه ای که می خواهیم ارتفاعش را تعیین کنیم دسترسی داشته باشیم ( شکل ۳ )  $B'C' = BC$  را با دقت اندازه گیریم و از حل مثلث  $ABC$  ارتفاع نقطه  $A$  را بدست می آوریم.

۲) اگر بموقع قائم دسترسی



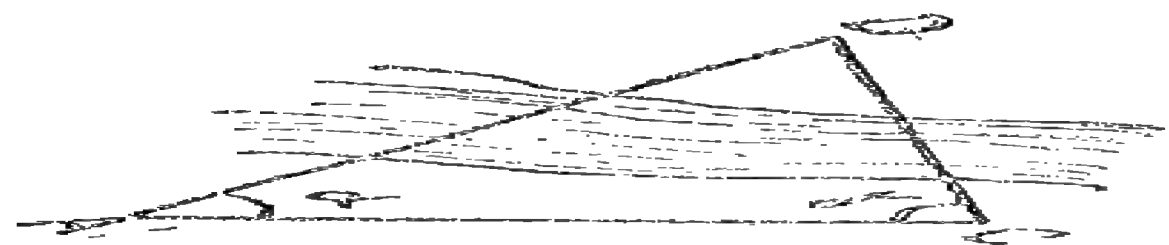
شکل ۳



نیباشد (ش ۳) طول  $AB$  را در روی زمین مسطحی بدقت اندازه میگیریم و زوایای  $\alpha$  و  $\beta$  را هم زاویه یاب تعیین می کنیم؛ از حل مثلث  $ABC$  طول  $AC$  بدست میآید، آنگاه مثلث قائم  $CAD$  را با وتر  $AC$  و زاویه

حل میکنیم تا  $CD$  (و در نتیجه  $AD$ ) بدست آید ( $AD$ ) مساوی ارتفاع زاویه یاب از سطح زمین است)

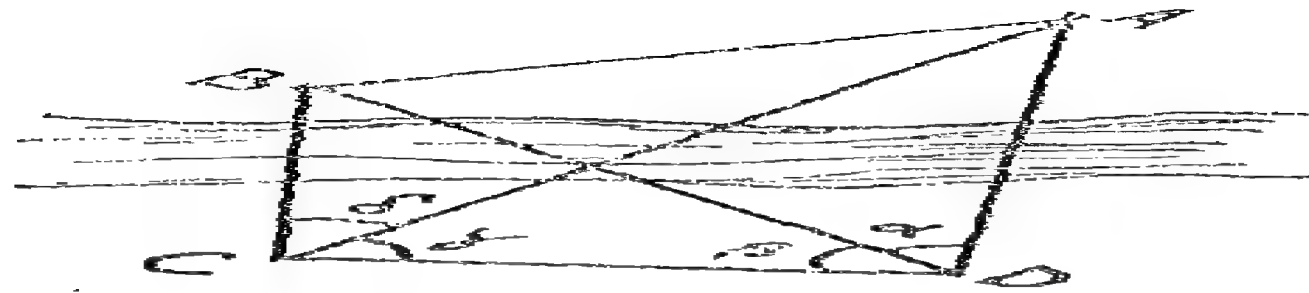
۶۰ - فاصله نقطه  $A$  را از  $D$  ۴۵ و در دسترس نیست معلوم کنیم



نقطه ای مانند  $A$  در نظر گرفته فاصله  $AC$  و زوایای  $\alpha$  و  $\beta$  (ش ۴) را اندازه میگیریم و مثلث  $ACD$

را حل میکنیم (حالت اول، شماره ۵)

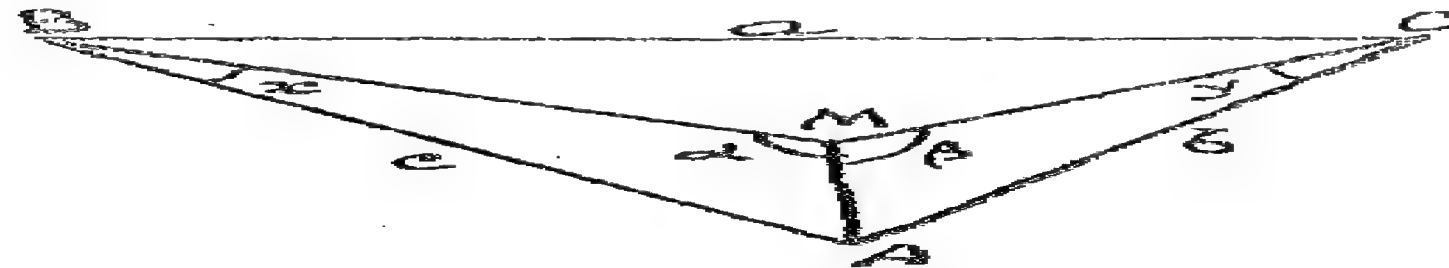
۶۱ - اگر به  $D$  و  $A$  هیچیک دسترس نباشد (ش ۵) دو نقطه  $E$  و  $F$  را در نظر گرفته فاصله  $EF$  و زوایای  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  و  $\delta$  را اندازه میگیریم.



شکل ۵

روی نقشه مشخص گردیده اند ، میبخشواهدیم و ضلع نقطه  $N$  را در روی نقشه معین نمائیم در صورتیکه میدانیم از  $N$  قطعه  $AB$  بزائیه  $\alpha$  و قطعه  $AC$  بزائیه  $\beta$  دیده میشود (ش ۶)

براه هندسی میتوان این مسئله را حل کرد باین معنی که درروی نقشه بر  $AB$  و  $CD$  بترتیب قطعه دایره های حاوی زوایای  $\alpha$  و  $\beta$  را رسم نمود تا از تقاطعشان نقطه  $N$  بدست آید .



شکل ۶

$T$  نگاه بکماک  $CD$  و  $T$  و  $P$  طول  $AC$  و بکماک  $CM$  و  $Q$  و  $R$  طول  $BC$  را حساب میکنیم و از حل مثلث  $ACB$  ( حالت دوم ، شماره ۵۲ )  $AB$  را بدست میآوریم

۶۲- مسئله نقشه - مواضع سه نقطه اصلی  $A$  و  $B$  و  $C$

براه مثلثاتی باید  $MA$  و  $MB$  ( و  $MC$  ) را حساب کرد - برای این کار از معلوم بودن اجزاء مثلث  $ABC$  استفاده میکنیم .  
دو مثلث  $AMB$  و  $AMC$  :

$$\frac{MA}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \alpha} \quad \text{و} \quad \frac{MA}{\sin \beta} = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{b \sin \alpha}{c \sin \beta}$$

$$\alpha + \beta = 2\pi - \alpha - \beta = A$$

از دستگاه اخیر: و  $\beta$  حساب میشوند و از حل مثلثهای  $AMB$  و  $AMC$  میتوان  $MB$  و  $MC$  را تعیین کرد و  $M$  را بدست آورد.

پایان

## ۱ تعاریف

- ۱ - جسم چیزی است که قسمت‌های از فضا را اشغال کند .  
مقداری از فضا را که جسم اشغال میکند ، حجم آنست ، فصل مشترک دو جسم یا حد هر جسم را سطح ، فصل مشترک دو سطح یا حد هر سطح را خط ، سطح را نقطه گویند .
- ۲ - خط مستقیم ساده ترین خطها و نامحدود است .  
قیم خط از یکطرف و نقطه از دوطرف محدود میباشد .
- ۳ - صفحه یا سطح مستوی ساده ترین سطوح و آن نیز نامحدود است .
- ۴ - دو خط یا دو صفحه موازی هیچگاه یکدیگر را قطع نمیکند .
- ۵ - دایره خط منحنی بسته ایست که همه نقاطش از یک نقطه بنام مرکز یااصل تا بقی بنام شعاع باشند .
- ۶ - حکم عبارتست از بیان یک فرض و یک مستنبط .  
اصل<sup>۱</sup> مشهور فی الحکمیهست که بی دلیل واضح باشد . اصل موضوع حکمیهست که تمهید ایندیرفته شود . قضیه حکمیهست که اثباتش محتاج باقامه برهان باشد .

- ۷ — حقایق هندسی مبتنی بر سه اصل ذیل هستند :
- (۱) برد و نقطه فقط يك خط میگذرد (۲) از يك نقطه فقط يك خط موازی خط دیگر میگذرد (اصل موضوع اقلیدس) .
- (۳) هر شکل را میتوان در صفحه یا فضا جایجا کرد بی آنکه در آن تغییری پیدا شود .
- ۸ — مکان هندسی عبارتست از مجموع نقاطی که همه يك خاصیت هندسی داشته باشند .

## II — زوایا و خطوط عمود بر هم

- ۹ — زاویه یا گوشه قسمتی از صفحه است که بین دو نیم خط متقاطع محصور باشد . نقطه تلاقی دو خط را **قارص** یا **راس** و هر خط را **پهلوی یا ضلع** گویند . هر دو نیم خط یا یکدیگر دو زاویه میسازند، آنرا **ک**، **کوچکتر است** (و معمولاً مراد از زاویه همانست) **گوژ** یا **محدب** بود دیگری را **گای** یا **مقعر** گویند (ش ۱)



ش ۱

- ۱۰ — ممکنست در صفحه جهت مثبت و منفی قائل شد . مثلاً جهت دوران عقربه های ساعت را منفی و جهت مخالف دوران عقربه ها را مثبت فرض کرد . در اینصورت زاویه هم مثبت یا منفی تواند بود . اگر يك ضلع برای اینکه ضلع دیگر نزدیک شود در جهت مثبت دوران کند زاویه مثبت است و گرنه منفی (درش ۱ ص ۸۷)

منفی و  $\alpha$  مثبت است) .

۱۱ — قضیه — از يك نقطه فقط میتوان يك عمود بر خطی رسم کرد .

۱۲ — نتیجه — خطوط عمود بر يك خط با هم موازی است .

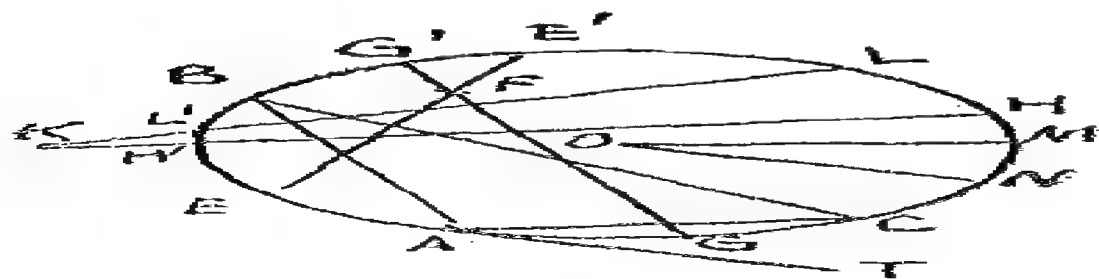
۱۳ — اندازه زاویه — زاویه را با درجه و گراد و رادیان اندازه میگیرند . ( رجوع شود به قسمت مثلثات ، شماره ۲ ، صفحه ۱۲۹ )

۱۴ — دو زاویه مجاور يك ضلع مشترك دارند . در زاویه مجاور که اضلاع غیر مشتركشان بر يك امتداد باشند مجانب نام دارند . دو زاویه متقابل اند که اضلاعشان بر يك استقامت باشند .

۱۵ — اگر دو زاویه مجانب با هم برابر باشند هر يك را قائمه یا راست و ضلع مشتركشان را بر ضلع دیگر عمود مینامند . زاویه کوچکتر از قائمه را قوس یا حاده و بزرگتر از آنرا باز یا منفرجه میگویند .

۱۶ — دو زاویه را که مجموعشان يك قائمه باشد متهم و دو زاویه را که مجموعشان دو قائمه باشد مکمل گویند .

۱۷ — هر گاه دایره ای در نظر گرفته شود : زاویه مرکزی آن است که تار کش بر مرکز دایره



(ش ۲)







۲۱- اگر دو خط  $\Delta_1$  و  $\Delta_2$  را خط سوم  $D$  قطع کند (ش ۳) هشت زاویه حادث میشود:

دو زاویه غیر مجاور را که در یک طرف  $D$  باشند متقابل و دو زاویه را که در دو طرف  $D$  باشند متبادل

گویند؛ دو زاویه را که بین  $\Delta_1$  و  $\Delta_2$  باشند درونی و زاویه های خارج  $\Delta_1$  و  $\Delta_2$  را بیرونی نامند.

۲۲- قضیه - اگر دو خط موازی را خط سومی قطع کند دو زاویه متبادل همنام باهم برابرند.

۲۳- قضیه عکسی - اگر دو خط را خط سومی قطع کند و دو زاویه متبادل همنام باهم برابر باشند دو خط اول یا یکدیگر موازیند.

۲۴- حالات برای برابری زوایا  
قضیه - دو زاویه که اضلاعشان با یکدیگر موازی باشند برابر یا مکملند.

قضیه - دو زاویه که اضلاعشان بر یکدیگر عمود باشند برابر یا مکملند.  
قضیه - دو زاویه متقابل برآس باهم برابرند.

III چند برها

۲۵- شکل حادث از تقاطع چند خط را چند خط برابر گویند. هر خط را یک ضلع یا پاره و محل تقاطع دو ضلع را

تارک یا رأس می‌نامند. اگر امتداد هیچیات از اضلاع شکل را قطع نکند چند پر را گوئد و گرنه گاو نامند. چند پر منظم آنست که همه زوایایش باهم و همه اضلاعی باهم مساوی باشند. زاویه بین هر دو ضلع يك زاویه درونی و آنکه بین يك ضلع و امتداد ضلع دیگر باشد زاویه بیرونی نام دارد. دو چند پر منظم يك نقطه میتوان یافت که از همه اضلاع بيك فاصلک باشد، این نقطه را مرکز می‌نامند. خطی را که از مرکز بر یکی از اضلاع عمود شود ارتفاع *Apothème* میگویند.

مجموع طولهای اضلاع محیط یا پیرامون است. قطر خطی است که دو تارک غیر مجاور را بهم ربط دهد.

۲۷ - قضیه - مجموع زوایای درونی چند پر  $n$  ضلعي  $(2n-4)$  قائمه است.

۲۷ - - قضیه - مجموع زوایای بیرونی هر چند پر چهار قائمه است.

۲۸ - قضیه - تعداد اقطار چند پر  $n$  ضلعي  $(\frac{n(n-3)}{2})$

است.

### ۲۷ مثلث

۲۹ - مثلث ساده‌ترین چند پردهاست. اگر دو ضلع آن مساوی باشند متساوی‌الساقین و هر يك از دو ضلع مساوی را ساق و اگر هر سه ضلع متساوی باشند متساوی‌الاضلاع است.

اگر يك زاویه آن قائمه باشد قائم است و ضلع مقابل بر او به قائمه را و ترگویند . میانه خطی است که از رأس بوسط ضلع مقابل وصل شود . ارتفاع عمود است که از رأس بر ضلع مقابل فرود آید . عمود منتهی خطی است که بوسط يك ضلع عمود گردد .

دایره محیطی آنست که بر سه رأس بگذرد . دایره محیطی بر سه ضلع مماس میباشد . دایره محیط خارج هر ضلع آنست که بر آن ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مماس باشد . ۳۰ - قراارداد . در این کتاب هر زاویه مثلث را با يك حرف بزرگ و ضلع مقابل آنرا با همان حرف ولی كوچك میخوانیم .

ارتفاعات وارد بر اضلاع  $a$  و  $b$  و  $c$  را  $h_a$  و  $h_b$  و  $h_c$  میانههای آن اضلاع را  $m_a$  و  $m_b$  و  $m_c$  شعاع دایره محیطی را  $R$  ، از آن دایره محیطی را  $r$  و اشعه دایره محیط بر اضلاع  $a$  و  $b$  و  $c$  را  $r_a$  و  $r_b$  و  $r_c$  و مساحت مثلث را  $S$  مینامیم .

در سه بر مشاوع الساقین رأس مشترك دوساق را  $A$  نام میگذارند و آنرا بطور مطلق رأس میگویند . در مثلث قائم رأس زاویه قائمه را  $A$  مینامند . محیط مثلث یعنی  $a+b+c$  را  $2p$  میگویند .

۳۱ - قضیه - مجموع زوایای مثلث ۲ قائمه است .  
۳۲ - قضیه - در مثلث هر ضلع کوچکتر است از مجموع و

بزرگتر است از تفاضل دو ضلع دیگر .

$$c - b < a < b + c$$

۳۳ - قضیه - در مثلث متساوی الساقین برآس  $A$

$$\angle A = 120^\circ \text{ و } \angle B = \angle C = 30^\circ$$

۳۴ - قضیه - در مثلث متساوی الساقین میانه های وارد بر دو ساق با هم برابرند ؛ همچنین ارتفاعهای وارد بر ساقها و نیمساز گوشه های مجاور دو ساق .

۳۵ - قضیه - در مثلث متساوی الساقین ارتفاع وارد بر قاعده میانه قاعده و نیمساز زاویه رأس هم هست .

۳۶ - قضیه - در مثلث متساوی الاضلاع :

$$a = b = c \text{ و } \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$$

۳۷ - قضیه - در مثلث متساوی الاضلاع سه ارتفاع با هم مساویند .

### حالات برابری مثلثها

۳۸ - قضیه - دو مثلث در این حالات با هم برابرند :

(۱) اگر دو ضلع و زاویه بین آنها در آن دو مثلث نخلیر بنخلیر مساوی باشند .

(۲) اگر دو زاویه و ضلع بین آنها در آن دو مثلث نخلیر بنخلیر مساوی باشند .

(۳) اگر سه ضلع آنها نخلیر بنخلیر مساوی باشند .

(۴) اگر دو ضلع و زاویه مقابل بضلع بزرگتر در آن دو مثلث نخلیر بنخلیر مساوی باشند .

۴۹ - قضیه - اوساط اضلاع مثلث ، مواضع ارتفاعات وارد براضلاع ووسط هرقطعه ازارتفاع واقع بین رأس و محل تلاقی ارتفاعات نه نقطه اند واقع برروی يك دایره ( دایره نه نقطه ) .

### تناسب و تشابه

۴۰ - قضیه طالسی - خطی که موازی يك ضلع مثلث رسم شود دوضلع دیگر را بر يك نسبت قطع میکند .  
 به کسی - خطی که دوشنم مثلث را بقطعات متناظر متناسب تقسیم کند موازی ضلع سوم است .  
 ۴۱ - قضیه - خطی که اوساط دوضلع مثلث را بهم ربط دهد موازی ضلع سوم و مساوی نصف آنست .  
 ۴۲ - هر دو مثلث - دوشکل را مشابه یا همانند گویند وقتی که اضلاع متناظرشان متناسب و زوایای متناظرشان متساوی باشند .

۴۳ - قضیه - دوسه بر در این احوال باهم مشابهند :

۱ - وقتی دو زاویه یکی نظیر بنظیر یا دو زاویه دیگری برابر باشند :

$$\angle A = \angle A' \quad \text{و} \quad \angle B = \angle B'$$

۲ - يك زاویه یکی با يك زاویه دیگری مساوی بوده و اضلاع آن دو زاویه یا یکدیگر متناسب باشند :

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} \quad \text{و} \quad \angle A = \angle A'$$

۳ - سه ضلع آنها متناسب باشند .

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

۴ - دو ضلعشان متناسب و زاویه مقابل ضلع بزرگتر در

هر دو مساوی باشد .

۵ - اضلاعشان به ترتیب بر هم عمود یا با هم موازی باشند

خواص منصف زاویه

۴۴ - قضیه - منصف ( نیمساز ) هر زاویه داخلی ضلع

مقابل را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم میکند .

۴۵ - قضیه - همچنین نیمساز هر زاویه بیرونی .

۴۶ - قضیه - محل برخورد نیمسازهای داخلی و خارجی

با یک ضلع مثلث نسبت بدو انتهای این ضلع مزدوج توانایی

یکدیگر کنند . ( یعنی اگر نقاط مذکور  $AM$  و  $AN$  و دو رأس

را  $B$  و  $C$  بنامیم :

$$\frac{MB}{MC} = \frac{M'B}{M'C}$$

۴۷ - قضیه - در دو مثلث مشابه ، ارتفاعات وارد بر

ضلعهای متناظر ، نیمسازهای زوایای متناظر و سایر خطوط

متناظر مانند شاعهای دوا بر محیطی و محاطی بر نسبت مشابه

دو شکلند .

۴۸ - قضیه - مساحات دو مثلث که یک زاویه مساوی

داشته باشند بر نسبت حاصلضربهای اضلاع آن زاویه است .

۴۹ - قضیه - در دو مثلث مشابه مساحات بر نسبت مربع اضلاع متناظرند .

۵۰ - قضیه - در هر مثلث مربع ضلع متقابل بر اویه حاده (منفرجه) مساویست با مجموع مربعات دو ضلع دیگر منهای (یا اضافه) دو برابر حاصلضرب یکی از آنها در تصویر ضلع دیگر بر آن

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot BH$$

$$= a^2 + c^2 - 2c \cdot BH'$$

(ش ۳ و ۴)

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2a \cdot BH$$

$$= a^2 + c^2 + 2c \cdot BH'$$



(ش ۳ و ۴)

۵۱ - قضیه - مجموع مربعات دو ضلع مثلث مساوی دو برابر مربع نصف ضلع سوم با اضافه دو برابر مربع میانه وارد بر این ضلع است .

نتیجه - مکان هندسی نقاطی که مجموع مربعات فواصل از دو نقطه ثابت مقدار ثابتی باشد محیط دایره ایست که مرکز آن بر وسط خط واصل بین نقاط مفروض واقع است

۵۲ - قضیه - تفاضل مربعات دو ضلع مثلث مساویست بدو برابر حاصلضرب ضلع سوم در تصویر میانه همین ضلع بر خود آن .

نتیجه - مکان هندسی نقاطی که تفاضل مربعات فواصل از دو نقطه ثابت مقدار ثابتی باشد خطی است عمود بر خط

واصل بین آن دو نقطه .

۵۳ - قضیه استوارت Stewart - اگر نقطه D بر روی ضلع BC از سه بر ABC اختیار گردد :

$$AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC = BC \cdot CD \cdot DB.$$

روابط بین اجزاء مختلف مثلث :

(۵۴) ارتفاعات :

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

قطعاتی از اضلاع که بوسیله ارتفاعات جدا میشوند :

$$BH = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \quad \text{و} \quad CH = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

$$CH' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} \quad \text{و} \quad H'A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$$

$$AH = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \quad \text{و} \quad H'B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}$$

۵۵ - منصف زاویه‌ها - فرض میکنیم AD و BD' و

CD'' سه منصف الزاویه‌های داخلی و AD، و BD' و CD''



منصف الزاویه‌های خارجی مثلث  $ABC$  باشند :  
 اولاً طول قطعاتی از اضلاع که بوسیله منصف الزاویه  
 های داخلی جدا شده‌اند عبارتند از :

$$DC = \frac{ac}{b+c} \quad \text{و} \quad BD = \frac{ac}{b+c}$$

$$D'A = \frac{bc}{c+a} \quad \text{و} \quad CD' = \frac{ab}{c+a}$$

$$D''B = \frac{ca}{a+b} \quad \text{و} \quad AD'' = \frac{bc}{a+b}$$

ثانیاً طول قطعات هر یک از اضلاع جدا شده بوسیله  
 منصف الزاویه‌های خارجی عبارتند از :

$$D_1B = \frac{ab}{b-c} \quad \text{و} \quad D_1C = \frac{ab}{b-c}$$

$$D'_1C = \frac{ab}{c-a} \quad \text{و} \quad D'_1A = \frac{bc}{c-a}$$

$$D''_1A = \frac{bc}{a-b} \quad \text{و} \quad D''_1B = \frac{ac}{a-b}$$

ثالثاً طول هر یک از منصف‌الزاویه‌های داخلی عبارتند از

$$AD = \sqrt{bc \left[ 1 - \frac{a^2}{(b+c)^2} \right]} = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}$$

$$BD' = \sqrt{ca \left[ 1 - \frac{b^2}{(c+a)^2} \right]} = \frac{2}{c+a} \sqrt{cap(p-b)}$$

$$CD'' = \sqrt{ab \left[ 1 - \frac{c^2}{(a+b)^2} \right]} = \frac{2}{a+b} \sqrt{abp(p-c)}$$

رایباً طول هریک از منصف‌الزاویه‌های خارجی عبارتست از :

$$AD' = \sqrt{bc \left[ \frac{a^2}{(b-c)^2} - 1 \right]} = \frac{a}{b-c} \sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$

$$BD'' = \sqrt{ca \left[ \frac{b^2}{(c-a)^2} - 1 \right]} = \frac{b}{c-a} \sqrt{ca(p-c)(p-a)}$$

$$CD''' = \sqrt{ab \left[ \frac{c^2}{(a-b)^2} - 1 \right]} = \frac{c}{a-b} \sqrt{ab(p-a)(p-b)}$$

۵۶ — میانه‌ها

$$m_a = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}$$

$$m_b = \sqrt{\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}}$$

$$m_c = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}$$

۵۷ — دایره‌های محیطی، محاطی و مماس خارج

$$R = \frac{bc}{2h_a} = \frac{ac}{2h_b} = \frac{ab}{2h_c}$$

$$= \frac{abc}{2S} = \frac{abc}{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \frac{S}{p}$$

شعاع دایره محاط خارج

$$r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$$

$$r_b = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}}$$

$$r_c = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}$$

قطعات محدود بین رؤس و نقاط تماس دایره محاطی:

قطعه بین رأس A و نقطه تماس

» » B » »

» » C » »

قطعات محدود بین رؤس و نقاط تماس دایره محاط خارج:

قطعه بین A و دایره محاط خارجی ضلع:

» » B » »

» » C » »

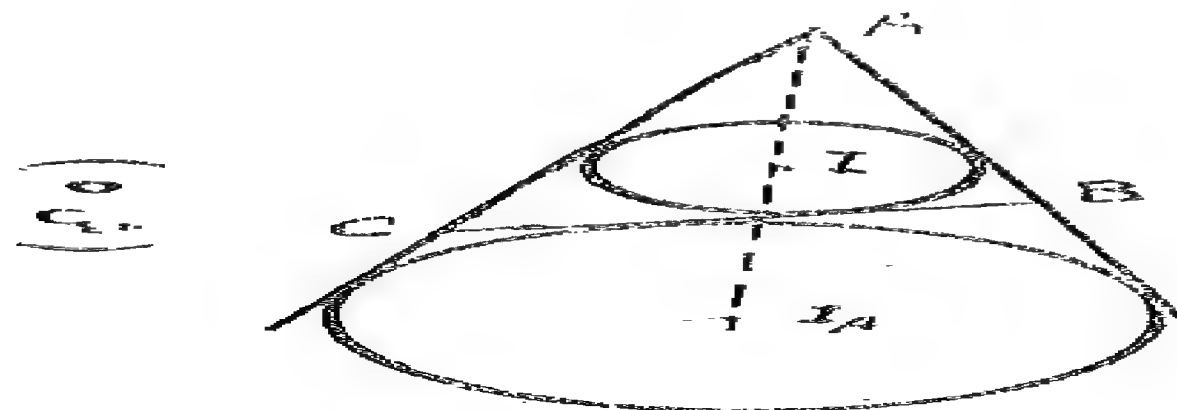
قطعاتی بر روی منصف زاویه رأس A که بین مراکز

دایره و رأس A محصورند: (ش ۵)

$$AI = \sqrt{bc \cdot \frac{p-a}{p}}$$

$$AI_a = \sqrt{\frac{pbc}{p-a}}$$

۵۸ — قضیه حاصل ضرب دو ضلع  
مثلث مساویست یا (۱) حاصل  
ضرب قطعاتی که منصف زاویه  
درونی بر روی ضلع سوم جدا  
میکند، یا ضافه مربع این منصف  
زاویه (۲) یا حاصل ضرب قطعاتی  
که منصف زاویه بیرونی بر روی  
ضلع مقابل جدا میکند، منهای  
مربع این منصف زاویه.



(۵)  
(۶)

۵۹ — قضیه — مواقع منصف زوایای خارجی مثلث سه نقطه اند واقع بر يك استقامت .

موربات

۶۰ — قضیه مثلاًثوس — هرگاه مورب  $\triangle$  سه ضلع مثلث  $ABC$  (یا امتداد آنها) را در  $M$  و  $N$  و  $P$  قطع کند (ش ۶)

$$\frac{MA}{MC} \cdot \frac{PC}{PB} \cdot \frac{NB}{NA} = 1$$

۶۱ — قضیه سوا — هرگاه سه رأس مثلث  $ABC$  را



به نقطه  $O$  واقع در صفحه آن وصل نموده امتداد دهیم تا اضلاع مقابل را در  $M$  و  $N$  و  $P$  قطع کنند (ش ۷)

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$$



۷ چهار بر (یا چهار ضلعی)

۶۲ — چهار برهای مهم — هر چهار بری که هر دو ضلع مقابل آن با یکدیگر موازی باشند متوازی الاضلاع است . در متوازی الاضلاع هر ضلع را میتوان قاعده دانست و عمودی را که از رأس مقابل بر آن فرود آید ارتفاع مینامند . راستگوشه یا مستطیل متواری الاضلاعی است که يك زاویه آن قائمه باشد ؛ لوزی یا مهین متوازی الاضلاعی است که دو

ضلع مجاورش با هم مساوی باشند . هر ربع مستطیلی است که لوزی هم باشد . ذی زفقه شکلی است که دو ضلع آن با هم موازی ، و دو ضلع دیگرش ناموازی باشند ؛ دو ضلع موازی را دو قاعده و عمود مشترک بین آنها را ارتفاع ذی زفقه گویند . **چهار بر محیطی** آنست که بتوان دایره‌ای بر چهار راسش گذراند . **چهار بر محیطی** آنست که بتوان دایره‌ای بر چهار ضلعش مماس کرد . هر گاه اضلاع مقابل چهار بر  $ABCD$  یکدیگر را در  $E$  و  $F$  قطع کنند شکل  $ABCD EF$  را یک **چهار بر کامل** مینامند .

### متوازی الاضلاع

۶۳ - قضیه - در متوازی الاضلاع (۱) هر دو ضلع مقابل با هم مساویند . (۲) دو قطر منصف یکدیگرند . (۳) دو زاویه مقابل با یکدیگر مساویند . (۴) دو زاویه مجاور محکوم یکدیگرند .

۶۴ - قضیه عکسی - اگر در چهار بری (۱) هر دو ضلع با هم مساوی و موازی باشند ؛ (۲) دو قطر منصف هم باشند ؛ (۳) دو زاویه مقابل با یکدیگر مساوی باشند ؛ (۴) دو زاویه مجاور مکمل هم باشند ؛ شکل متوازی الاضلاع است .

۶۵ - قضیه - محل برخورد قطرهای متوازی الاضلاع مرکز تقارن شکل است .

۶۶ - قضیه - مساحت متوازی الاضلاع مساویست به حاصل ضرب قاعده در ارتفاع .

## لوزی

- ۶۷ - قضیه - در لوزی دو قطر برهم عمودند .
- ۶۸ - قضیه - اگر در متوازی الاضلاع دو قطر برهم عمود باشند شکل لوزیست .
- ۶۹ - قضیه - اگر دو قطر چهار بری برهم عمود و منصف هم باشند شکل لوزیست .
- ۷۰ - قضیه - هر يك از دو قطر لوزی يك محور تقارن شكل است .
- ۷۱ - قضیه - مساحت لوزی مساویست با نصف حاصل ضرب دو قطر .
- مستطیل و مربع
- ۷۲ - قضیه - در مستطیل دو قطر با يكديگر برابرند .
- ۷۳ - عكسی قضیه - اگر دو قطر متوازی الاضلاع مساوی باشند شكل مستطیل است .
- ذوزنقه
- ۷۴ - قضیه - خطی كه اوساط دو ساق ( اضلاع ناموازی ) ذوزنقه را بهم وصل كند موازی قاعده و مساوی نصف مجموع دو قاعده است .
- ۷۵ - قضیه - در ذوزنقه متساوی الساقین : ۱ ) زوایای مجاور بهر قاعده برابرند . ۲ ) دو قطر باهم مساویند .
- ۷۶ - قضیه - خطی كه از محل برخورد دو قطر ذوزنقه موازی قاعده رسم شود بوسیله دو ساق بسو جزء مساوی

تقسیم می‌شود .

۷۷ - قضیه - مساحت ذوزنقه مساویست با حاصلضرب ارتفاع در نصف مجموع دو قاعده .

چهار بر محیطی

۷۸ - قضیه - در چهار بر محیطی مجموع هر دو ضلع مقابل مساویست با مجموع دو ضلع دیگر .

۷۹ - معکوس قضیه - اگر مجموع دو ضلع مقابل یک چهار بر گوی مساوی مجموع دو ضلع دیگر باشد شکل قابل محیط شدن بردایره است .

چهار بر محیطی

۸۰ - قضیه - در چهار محیطی زوایای مقابل مکمل یکدیگرند .

۸۱ - اگر در چهار بر محیطی اضلاع را به ترتیب  $a, b, c, d$  و اقطار را  $m$  و  $n$  و محیط را  $2p$  بنامیم :

قضیه بطلمی :

$$\frac{m}{n} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$$

$$m \cdot n = ac + bd$$

$$m = \sqrt{\frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}}$$

$$n = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}}$$

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \quad \text{مساحت}$$

$$S = \sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)} \quad \text{شعاع دایره محیطی}$$

## چهار بر کامل

۸۶ - قضیه Gauss - اوساط قطر چهار بر کامل بر یک امتدادند .

۸۷ - قضیه پاپوس - در هر چهار بر کامل هر قطر بوسیله دو قطر دیگر به نسبت توانقی تقسیم میشود .

## IV چند برهای منتظم

۸۸ - تهریم - در چند بر منتظم همه اضلاع با هم و همه زوایا با هم برابرند .

۸۹ - قضیه - چند بر منتظم قابل محاط شدن در دایره و محیط شدن بر دایره است .

۹۰ - قضیه - هرگاه محیط دایره را به ۱۱ جزء مساوی تقسیم نمائیم : ۱) از وصل گردن نقاط تقسیم ۱۱ بر منتظم محاطی بدست میآید ۲) از نقاط مماسهای گه بر نقاط تقسیم بدست شوند ۱۱ بر منتظم محیطی بدست میآید ۳) اگر نقاط تقسیم را به ۱۱ بهم وصل کنیم ۱۱ بر منتظم کوکبی حاصل میشود تعداد چند برهای منتظم ۱۱ کوکبی مساویست با عدد اعداد کوچکتر از  $\frac{11}{2}$  که نسبت به ۱۱ اول باشند .



هرگاه ضلع  $n$  بر محیطی را  $C_n$  و از آن  $n$  بر محیطی را  $A_n$  و شعاع دایره را  $R$  و عمودی را که از مرکز چند بر محیطی برضلع فرود میآید ( یعنی ارتفاع  $apothème$  ) را  $a$  بنامیم این روابط را خواهیم داشت :

۸۸ - محاسبه  $C_{\gamma n}$  بر حسب  $C_n$  :

$$C_{\gamma n} = \sqrt{R (\gamma R - \sqrt{\epsilon R^2 - C_n^2})}$$

۸۸ - محاسبه  $A_n$  بر حسب  $C_n$  :

$$A_n = \frac{\gamma R C_n}{\sqrt{\epsilon R^2 - C_n^2}}$$

۸۹ - محاسبه  $A_{\gamma n}$  بر حسب  $A_n$  :

$$A_{\gamma n} = \frac{\gamma A_n R}{\gamma R + \sqrt{\epsilon R^2 + A_n^2}}$$

۹۰ - محاسبه  $a_n$  بر حسب  $C_n$  :

$$a_n = \frac{\sqrt{\epsilon R^2 - C_n^2}}{\gamma}$$

۹۱ - ضلع و ارتفاع چند بر منتظم :

$$C_{\gamma} = R \sqrt{\gamma}$$

$$a_{\gamma} = \frac{R}{\gamma}$$

۱ - سه بر

$$C_{\epsilon} = R \sqrt{\epsilon}$$

$$a_{\epsilon} = \frac{R \sqrt{\epsilon}}{\gamma}$$

۲ - مربع

۳ - پنج پر

$$C_5 = \frac{R}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \quad ; \quad a_5 = \frac{R}{4} (\sqrt{5} + 1)$$

$$C_4 = R \quad ; \quad a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2} \quad \text{شش پر} :$$

۵ - ده پر :

$$C_{10} = \frac{R}{4} (\sqrt{5} - 1) \quad ; \quad a_{10} = \frac{R}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

۶ - پانزده پر :

$$C_{15} = \frac{R}{4} (\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3})$$

۹۲ - اگر  $r$  شعاع دایره محیطی و  $a$  ارتفاع  $n$  پر منتظمی که محیطش در باشد و  $r'$  شعاع و  $a'$  ارتفاع  $2n$  پر منتظمی که محیط آن نیز همان در باشد، بین چهار مقدار  $a$  و  $r$  و  $a'$  و  $r'$  این دوابط برقرار است :

$$a = \frac{a' + r}{2} \quad ; \quad r = \sqrt{\frac{r'(a' + r)}{2}}$$

۹۳ - قضیه - مساحت چند پر منتظم برابرست با حاصل ضرب نصف محیط در ارتفاع آن .

۹۴ - قاعده - برای بدست آوردن مساحت چند پر نامنتظم آنرا بوسیله رسم قطر ها بسط پر ها و ذوققه ها تقسیم میکنیم و مساحت های اجزاء آنرا بیکدیگر میافزائیم .

## VII دایره

- ۹۵ - قضیه - هر قطر محور تقارن دایره است .  
 ۹۶ - قضیه - خط مستقیم دایره را فقط در دو نقطه قطع میکند .  
 تبصره - اگر دو نقطه بر هم متعلق شوند خط را بر دایره مماس گویند .

## اوضاع نسبی دو دایره

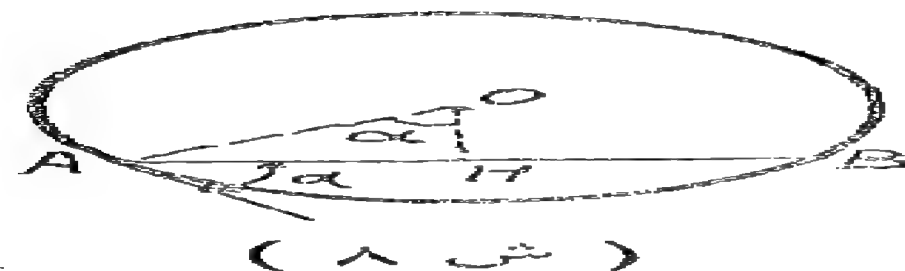
- ۹۷ - دو دایره ممکن است متخارج ، مماس خارج ، متقاطع ، مماس داخل یا متداخل باشند . فاصله مرکز دو دایره را به دلالت میگویند و به  $d$  نمایش میدهند .  
 ۹۸ - قضیه در دو دایره متخارج  
 $d > R + R'$  « « مماس خارج  
 $d = R + R'$  « « متقاطع  
 $R - R' < d < R + R'$  « « مماس داخل  
 $d = R - R'$  « « متداخل  
 $d < R - R'$

- ۹۹ - قضیه - در دو دایره مماس بر هم خط الم مرکزین از نقطه مماس میگذرد .  
 ۱۰۰ - قضیه - در دو دایره متقاطع خط الم مرکزین بر وتر مشترک عمود است .

## اندازه زاویه

- ۱۰۱ - برای زاویه های مرکزی ، مماسی ، ظلی ، داخلی و مقیاس آنها رجوع شود به شماره ۱۷

- ۱۰۲ - قوسیه در یک دایره یا ذوایر مساوی قوسهای مساوی مقابلند بزوایای مرکزی مساوی و بعکس .
- ۱۰۳ - مسأله - بر قطعه  $AB$  دایره حاوی زاویه  $\alpha$  (شماره ۱۷) را مرور دهید .



کافیست  $AC$  را چنان رسم کنیم که با  $AB$  زاویه  $\alpha$  را بسازد (ش ۸) عمودی که از  $A$  بر  $AC$  اخراج شود عمود منصف  $AB$  را در  $O$  قطع میکند . مرکز  $O$  و شعاع دایره معلوم است .

### قوس و وتر

- ۱۰۴ - قوسیه - هر وتر کوچکتر است از قطر .
- ۱۰۵ - قوسیه - دو انتهای قطری که بر یک نقطه میگذرد دورترین و نزدیکترین نقاط دایره نسبت به آن نقطه اند .
- ۱۰۶ - قوسیه - در یک دایره وترهای مساوی مقابلند بقوسهای مساوی .
- ۱۰۷ - قوسیه - ۱) دو وتر مساوی از مرکز دایره بیشت فاصله اند . ۲) از دو وتر نامساوی آنکه بزرگتر نزدیکتر است بزرگتر است .
- عکس قوسیه هم صحیح است .
- ۱۰۸ - قوسیه - قطر عمود بر وتر و قوس مقابل آنرا نصف میکند .

۱۰۹ - قضیه - مماس بر دایره بر شعاع نقطه تماس عمود است.

۱۱۰ - قضیه - هر خطی که بر انتهای شعاعی عمود باشد بر دایره مماس است.

۱۱۱ - رسم مماس بر دایره - ۱) اگر نقطه  $NI$  بر دایره باشد بر انتهای شعاعی که بر آن نقطه بگذرد خطی عمود باید کرد. ۲) اگر نقطه  $MI$  بیرون دایره و  $O$  مرکز دایره باشد قطر  $OM$  دایره ای میکشیم تا دایره مقروض را در  $T$  و  $T'$  قطع کند.  $MT$  و  $MT'$  جوابهای مسئله اند. ۳) اگر مماس باید موازی امتداد  $\triangle$  باشد از مرکز دایره عمودی بر  $\triangle$  فرود میآوریم تا دایره را در دو نقطه قطع کند و بر آن دو نقطه دو مماس میکشیم.

۱۱۲ - قضیه - هر خطی که بر دو دایره مماس باشد مماس مشترک دو دایره است. اگر دو دایره یکطرفه مماس باشند مماسی مشترک خارجی است و اگر دو طرفه مماس باشند مماسی مشترک داخلی.

۱۱۳ - جدول نمایندگی و ضم دو دایره مماسهای مشترک

وضع دودیره	خارج	مماس خارج	مقاطع	مماس داخل	متداخل
تعداد مماسهای مشترک داخلی	۲	۲	۲	۱	۰
« « « « « «	۲	۱	۰	۰	۰
« « « « « «	۲	۲	۲	۱	۰

۱۱۴ - قاعده رسم مماس مشترک خارجی : اگر  $O$  و  $O'$  مراکز و  $R$  و  $R'$  شعاعهای دودایره  $(R \gg R')$  باشند و بقطر  $OO'$  يك دایره و بمرکز  $O$  و شعاع  $R - R'$  دایره دیگری بنسیم تا یکدیگر را در  $M$  و  $M'$  قطع نمایند ، از  $O$  به  $M$  و  $M'$  وصل میکنیم و از محل تقاطع  $OM$  و  $OM'$  یا دایره  $O$  خطوطی موازی  $OM$  و  $OM'$  میکشیم؛ این خطوط مماسهای مطلوبند .

۱۱۵ - برای رسم مماسهای مشترک داخلی عیناً مانند حالت قبل عمل میکنیم جز اینکه دایره ایکه بمرکز  $O$  رسم میکنیم بشعاع  $(R + R')$  خواهد بود .

### قوت نقطه

۱۱۶ - قضیه - چون دووتر یکدیگر را در داخل دایره قطع کنند حاصلضرب دو قطعه یکی برابر است بحاصلضرب دو قطعه دیگری .

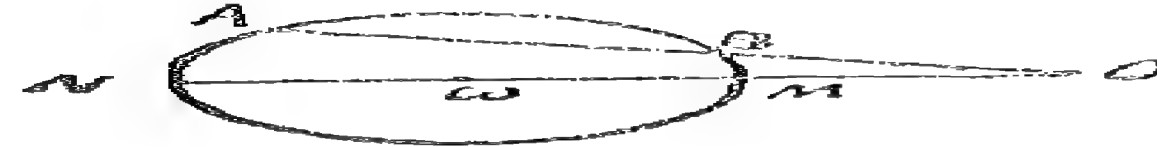
۱۱۷ - قضیه - هرگاه دو قاطع در بیرون دایره یکدیگر را تلاقی نمایند حاصلضرب هر يك در جزء خارجی آن مساوی است بحاصلضرب قاطع دیگر در قسمت خارجیش .  
نتیجه - اگر از يك نقطه قاطع و مماس بر يك دایره رسم شوند مربع مماس مساویست بحاصلضرب تمام قاطع در جزء خارجی آن .

۱۱۸ - قضیه - اگر بر روی دو خط که در  $O$  یکدیگر را قطع کرده باشند چهار نقطه  $A$  و  $B$  و  $A'$  و  $B'$  چنان باشند

که  $OB^2 = OA^2$  .  $OB = OA$  باشد آن چهار نقطه بر محیط یک دایره قرار دارند .

۱۱۹ - تهریف - قوت یا توان يك نقطه نسبت بدایره حاصلضرب دو قطعه قاطعی است که

در این نقطه بر دایره رسم شود  
(ش ۹)



$P = OA \cdot OB = OM \cdot ON = (d+R)(d-R) = d^2 - R^2$   
بحث - اگر O بیرون دایره باشد

$P = d^2 - R^2 = 0$  « « « «

$P = d^2 - R^2 < 0$  « « « «

۱۲۰ - تهریف - محور اصلی دو دایره مکات

هندسی تقاطعی است که نسبت باین دو دایره يك قوه داشته باشند .

۱۲۱ - قضیه - محور اصلی دو دایره خطی است عمود

بر خط المرکزین . اگر فاصله O و O' مراکز دو دایره را d

و شعاعشان را R و R' و موقع محور اصلی بر خط المرکزین

را H بنامیم :

$$OH = \frac{R^2 - R'^2 + a^2}{2a}$$

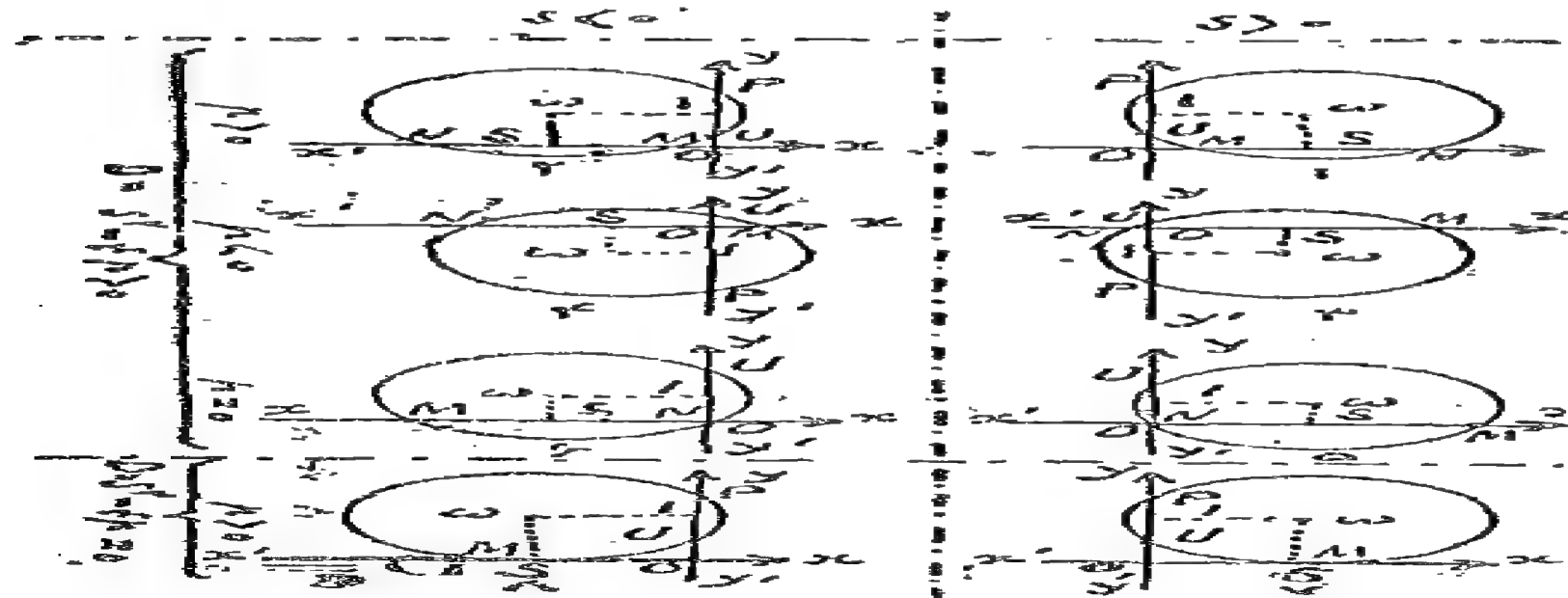
نتیجه - محور اصلی دو ایر متحد المراكز بقاصله بینهایت

دور واقع است .

۱۲۲ - تهریف - چند دایره که يك محور اصلی داشته

باشند يك دسته دایره misceau تشکیل میدهند .  
 ۱۲۳ - قضیه به محورهای اصلی سه دایره که مراکز آنها بر يك امتداد نباشند بر يك نقطه میگذرند . این نقطه را مرکز اصلی سه دایره گویند .

۱۲۴ - حل و بحث معادله درجه دوم .  $x^2 + px + q = 0$  رسم میکنیم (ش ۱۰) در روی



و در روی  $Ox$ ،  $OS = \frac{p}{2}$

را جدا میکنیم، عمود مماس  $PU$  عمود پرا که از  $S$  بر  $Ox$  خارج شود در  $N$  قطع میکنند دایره ای که مرکز آن  $P$  و شعاع  $PN$  رسم شود  $Ox$  را در  $M$  و  $N$  قطع میکنند و  $OM$  و  $ON$  جواب های معادله اند .

دو دایره عمود بر هم  
 ۱۲۵ - تعریف -  
 زاویه بین دو دایره  
 متقاطع زاویه بین دو

مماس است که از یکی از نقاط تقاطع بر دو دایره رسم شوند .  
 دو دایره را که زاویه بین آنها  $90^\circ$  باشد عمود بر هم گویند .



۱۲۶ - قضیه - محور اصلی دودایره مکان مراکز دوایر عمود بر آن دودایره است .

۱۲۷ - قضیه - شرط لازم و کافی برای آنکه دودایره برهم عمود باشند آنست که قطریکی بوسیله دیگری بمزدوج توافقی تقسیم شده باشد .

۱۲۸ - قضیه - کلیه دوایری که دودایره مخروط را بزائویه قائمه قطع میکنند بر دو نقطه ثابت واقع بر خط الامر کزین آن دودایره میگذرند .

#### محیط و مساحت دایره

۱۲۹ - قضیه - محیط دایره حد مشترک محیط چند بر محیط بر آن و محاط در آنست وقتی عدد اضلاع این چند برهاهای بینهایت زیاد شود .

۱۳۰ - قضیه - نسبت محیطهای دودایره مساوی نسبت شعاعهای آنهاست .

۱۳۱ - قضیه نسبت محیط دایره بقطر آنست عددیست ثابت این عدد  $3.141592658 \dots = \pi$  است .

(نتیجه - ۱) محیط دایره ای بشعاع  $R$  مساویست با  $2\pi R$

(۲) طول قوس  $\alpha$  درجه مساویست با  $R \cdot \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi$

۱۳۲ - محاسبه  $\pi$  - بدو طریق ممکنست : ۱) دستور

محیطها که در آن حد محیط چند برمحاطی در دایره ای بشعاع  $R$  را پیدا میکنند ، زیرا در دایره ای که

$$C = 2\pi R = 2\pi \frac{1}{2} = \pi$$

۲) دستور محیط های برابر ( Isvpérimètres ) که در آن عکس شعاع دایره ای را که محیطش مساوی ۱ است بدست می آورند ، زیرا در چنین دایره ای

$$\pi = \frac{1}{R} \text{ پس } R = \frac{C}{2\pi} = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$$

۱۳۳- قضیه - مساحت دایره مساویست با  $\pi R^2$

۱۳۴- تعریف - قطاع دایره قسمتی از دایره است محصور بین يك قوس و دو شعاع . قطعه دایره محصور است بین يك قوس و وتر آن

۱۳۵- قضیه - ۱) مساحت قطاع مساویست بحاصلضرب قوس آن در نصف شعاع . ۲) مساحت قطعه مساویست بحاصلضرب نصف شعاع در قوس و طول قوس آن بر نصف وتر قوس مضاعف آن قوس .

### VIII بردارها

۱۳۶- تعریف - بردار قطعه خطی است که دارای مقدار و امتداد و جهت معین باشد . دو بردار موازی و مساوی و در يك جهت را همسانگ ، دو بردار همسانگ واقع بر يك خط را همچنان یا همادلی خوانند . دو بردار موازی و مساوی ولی در دو جهت مختلف را جهت یازوج گویند .

۱۳۷- مقدار جبری بردار به مساویست با طول ( آیسس ) منها منهای طول مبدأ آن .

۱۳۸ - قضیه شال - ۱) اگر سه نقطه ثابت  $A$  و  $B$  و  $C$  بريك امتداد باشند .

$$(AB) + (BC) + (CA) = 0$$

۲) اگر چند نقطه  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $\dots$  و  $K$  و  $L$  بريك امتداد باشند :

$$(AB) + (BC) + \dots + (KL) + (LA) = 0$$

۱۳۹ - برآیند یا مجموع هندسی چند بردار را باینطریق بدست میآورند : از انتهای اولی برداری همسنگ دومی و از انتهای بردار جدید برداری همسنگ سومی و از انتهای این یکی برداری همسنگ چهارمی میکشند و عمل را ادامه میدهند تا همسنگهای تمام بردارهای مفسر و رسم شوند . آنگاه مبدأ اولین بردار را به انتهای آخرین بردار وصل میکنند . این بردار برآیند یا منتهجه یا مجموع هندسی بردارهای مفسر است . (ش ۱۱)



۱۴۰ - قضایا هندسی دو بردار که يك مبدأ داشته باشند بردار است که منتهای آن دو را بهم ربط دهد .

۱۴۱ - برآیند بردارهای غیر واقع در يك صفحه نیز مانند بردارهای واقع در يك صفحه بدست میآید .

حالاتی خاص - ۱) برآیند دو بردار که يك مبدأ

داشته باشند قطر متوازی الاضلاعیست که بر روی آن دو ساخته شود . ( ش ۱۲ )  
 ( ۲ ) برآیند سه بردار غیر واقع در يك صفحه که يك مبدأ داشته باشند قطر متوازی السطوحی است که آن بردارها سه پال آن باشند ( ش ۱۳ )



ش ۱۳



ش ۱۲

تصاویر بردارها

۱۴۲ - تعریف - تصویری قائم نقطه  $A$  بر يك خط یا يك صفحه موقع عمودی است كه از نقطه بر خط یا صفحه فرود آید .  
 ۱۴۳ - قضیه - تصویری برآیند چند بردار برآیند تصاویر آن بردارهاست .

## IX موريات

۱۴۴ - قضیه منلائوس - رجوع شود بشماره ۶۰  
 ۱۴۵ - قضیه سوا - « « « ۶۱  
 ۱۴۶ - قضیه پاسکال - در هر شش بر محیطی اضلاع مقابل دو به دو یکدیگر را در سه نقطه قطع میکنند که بر يك استقامتند

نتیجه ۱) در پنج بر محاطی چهار ضلع دو بدو متناهی یکدیگر را در دو نقطه قطع میکنند که با نقطه تلاقی ضلع سوم بامماس بر رأس مقابلش بر یک استقامتند. ۲) در چهار بر محاطی محل تلاقی دو ضلع با دو نقطه تلاقی دو ضلع دیگر با مماسهای بر رؤس مقابلشان بر یک استقامتند. ۳) در هر سه بر مماس بر دایره محیطی در هر رأس ضلع مقابل را قطع میکنند و سه نقطه تقاطع بر یک امتدادند. (ممکنست نقاط تقاطع بی نهایت دور باشند)

۱۴۷ - قضیه دالامیر - شماره ۱۷۲ دیده شود.

### X تقسیم توافقی

۱۴۸ - قضیه - در هر روی هر خط فقط دو نقطه  $M$  و  $M'$  میتوان یافت که قدر مطلق نسبت فواصل آنها از دو نقطه ثابت  $A$  و  $B$  واقع بر آن خط مساوی عدد ثابت  $k$  باشد. نتیجه - با در نظر گرفتن علامت چیری در روی هر خط فقط یک نقطه میتوان یافت که نسبت فواصل آن از  $A$  و  $B$  مساوی مقدار ثابت چیری  $k$  باشد.

$$\frac{MA}{MB} = - \frac{M'A}{M'B} \quad \text{پس}$$

میگیرند  $M$  و  $M'$  نقطه  $AB$  (و  $B$  و  $A$  نقطه  $M'$  و  $M$ ) را بنسبت توافقی  $k$  تقسیم کرده اند.

(۱) اگر  $O$  وسط  $AB$  باشد:  $AO^2 = OM \cdot OM'$

$$(۷) \quad \frac{1}{AM} + \frac{1}{AM'} = \frac{2}{AB}$$

۱۵۰ — تعریف — اگر چهار نقطه  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  خطی را بنسبت توافقی تقسیم کنند و از يك نقطه  $O$  بآن چهار نقطه وصل کنیم  $O-ABCD$  را يك دسته اشعه توافقی و هر يك از خطوط  $OA$  و  $...$  را يك شعاع توافقی مینامند.

۱۵۱ — قضیه — هر خط که موازی يك شعاع توافقی باشد یوسيله سه شعاع دیگر بدو جزء مساوی تقسیم میشود.

۱۵۲ — قضیه — هر خط که يك دسته اشعه توافقی را قطع کند بهمین نسبت توافقی تقسیم میشود.

## XI تقارن

### ۹ — تقارن مرکزی

۱۵۳ — (۱ —) قرینه هر نقطه  $M$  نسبت بنقطه  $O$  نقطه  $M'$  است که با  $O$  و  $M$  بر يك امتداد بوده و  $OM' = OM$  باشد.  $O$  را مرکز تقارن میگویند. (۲ —) قرینه هر شکل نسبت بمركز  $O$  شکلی است که هر نقطه اش قرینه يك نقطه از شکل اول باشد.

۱۵۴ — (قضیه — ۱) قرینه مرکزی هر قطعه خط موازی و مساوی و در جهت مخالف آنست. (۲ —) قرینه مرکزی هر زاویه مساوی و در جهت موافق آنست. (۳ —) قرینه مرکزی هر شکل (چند بر) شکلی (چند بری) مشابه آنست.

۱۵۵ — هر کز تقارن يك شكل به اگر در شكلي نقطه ای بتوان یافت که قرینه هر نقطهٔ شكل نسبت بآن همچنان بر شكل واقع شود آن نقطه را مرکز تقارن شكل میگویند، مانند مرکز دایره و محل تلاقی دو قطر متوازی الاضلاع،

#### ۴ — تقارن محوری

۱۵۶ — (تعیین ۱) قرینه يك نقطه نسبت بخط  $\triangle$  نقطه  $M'$  است که با  $M$  بر روی خطی عمود بر  $\triangle$  بوده و فاصله آن از  $\triangle$  مساوی فاصله  $M$  از این خط باشد.  $\triangle$  را محور تقارن گویند. ۲) قرینه محوری هر شكل نسبت به محور  $\triangle$  شكلی است که هر نقطه اش قرینه يك نقطه از شكل اول باشد. ۱۵۷ — قضیه ۱) قرینه محوری هر قطعه خط قطعه خطی است مساوی آن که امتدادش محور را با امتداد آن قطعه خط در يك نقطه قطع میکند. ۲) قرینه محوری هر زاویه زاویه ایست مساوی و در جهت مخالف آن. ۳) قرینه محوری هر شكل شكلی است مساوی آن ولی غیر قابل انطباق بر آن.

۱۵۸ — محور تقارن هر شكل (در صورت وجود) خطیست که قرینه هر نقطه از شكل نسبت بآن همچنان بر شكل واقع شود. مانند قطر دایره و قطر لوزی.

۱۵۹ — قضیه — اگر شكلی دو محور تقارن عمود بر هم داشته باشد محل تلاقی آن دو محور، مرکز تقارن شكل است.

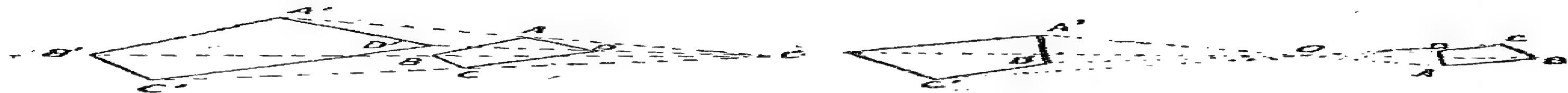
## XII تشابه

- ۱۶۰ - تعریف - دو شکل را مشابه یا هم‌شکل گویند وقتی که زوایای متناظرشان متساوی و اضلاع متناظرشان متناسب باشند .
- ۱۶۱ - برای تشابه در مثلث رجوع شود به شماره های ۴ تا ۴۳ .
- ۱۶۲ - قضیه - خطوط موازی بر روی دو خط غیر مشخص قطعات متناسب جدا میکنند .
- ۱۶۳ - قضیه - در دو شکل مشابه مساحات بر نسبت مربعات دو خط متناظر میباشند .
- ۱۶۴ - قضیه - همواره دو چند بر مشابه را میتوان بیک عدد مثلثهای مشابه و متشابه الوضخ تجزیه کرد .

## XIII تجانیس

- ۱۶۵ - تعریف - دو شکل  $F$  و  $F'$  را متجانیس هم گویند وقتی که هر دو نقطه متناظر  $M$  و  $M'$  آنها با نقطه ثابت  $O$  ، موسوم به مرکز تجانیسی ، بر یک امتداد بوده و نسبت  $\frac{MO}{M'O}$  مساوی مقدار ثابت  $k$  ، موسوم به نسبت تجانیسی ، باشد . اگر  $F$  و  $F'$  در یک طرف  $O$  باشند ،  $k > 1$  و تجانیسی هم‌تقییم است ( ش ۱۴ ) و اگر در دو طرف  $O$  باشند ،  $k < 1$  است و تجانیسی معکوسی ( ش ۱۵ )





ش ۱۵

ش ۱۶

- ۱۶۶ - قضیه - شرط لازم و کافی برای آنکه دو شکل میچانس باشند اینست که هر دو خط متناظر متوازی بوده نسبتشان مساوی نسبت میچانس باشد .
- ۱۶۷ - قضیه - میچانس خط مستقیم خطی است مستقیم .
- ۱۶۸ - قضیه - میچانس دایره دایره است .
- ۱۶۹ - قضیه - دو دایره در عین حال میچانس مستقیم و ممکوس یکدیگرند .
- ۱۷۰ - قضیه - مماسهای بر نقاط متناظر در دو منتهی متچانس با یکدیگر موازیند .
- ۱۷۱ - قضیه - دو شکل  $F^1$  و  $F^2$  که میچانس شکل سوم  $F$  باشند میچانس یکدیگرند و سه مرکز میچانس آنها بر روی يك خط مستقیم واقعند .
- ۱۷۲ - قضیه - سه دایره دو دایره دارای شش مرکز میچانسند . (۱) سه مرکز میچانس مستقیم بر يك امتدادند . (۲) هر مرکز میچانس مستقیم یا دو مرکز میچانس ممکوس بر يك استقامتند .

## XIV تغییر مکان در سطح

۱۷۷۳- تغییر مکان - هرگاه بر طبق قاعده مشخص و معینی بازاء هر نقطه  $M$  از شکل  $F$  نقطه‌ای مانند  $M'$  در صفحه شکل بدست آوریم شکل  $F'$  حادث از مجموع نقاط  $M'$  را میگویند از تغییر مکان  $F$  حاصل شده است و آنرا مبدل یا تبدیل یافته  $F$  میگویند.

تغییر مکان ممکنست در اجزاء شکل تغییر دهد، مانند تعجانی؛ یا در آنها تغییری ندهد، مانند انتقال و دوران. در این نوع تغییر مکانها تبدیل یافته شکل بوسیله یک لغزش در روی صفحه میتواند بر شکل اصلی منطبق شود.

۱۷۷۴- قضیه - در تغییر مکانهای که در آنها شکل تغییر نمیکند وضع جدید دو نقطه برای مشخص کردن وضع جدید شکل کافیست.

## انتقال

۱۷۷۵- هرگاه بردار  $(AB)$  مفروض باشد و بازاء هر نقطه  $M$  از شکل  $F$  نقطه  $M'$  را بدست آوریم بطوریکه  $(MM')$  همسنگ  $(AB)$  باشد گوئیم شکل  $F'$  حاصل از مجموع نقاط  $M'$ ، از انتقال شکل  $F$  باندازه  $(AB)$  بدست آمده است. بردار  $(AB)$  را که نماینده و مشخص انتقال است بردار انتقالی گویند.

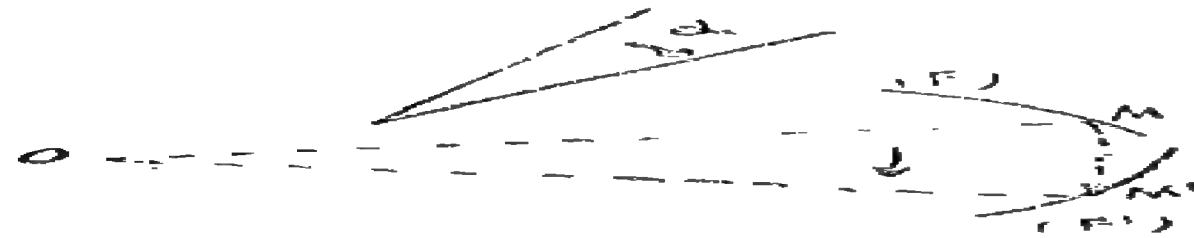
۱۷۷۶- قضیه - انتقال در اجزاء شکل تغییر نمیدهد.

۱۷۷ - قضیه - در انتقال دو بردار متناظر همسنگ هستند .  
 بعکس اگر در تغییر مکانی دو بردار متناظر همسنگ باشند  
 تغییر مکان انتقال است .

۱۷۸ - قضیه - تغییر مکان حاصل از چند انتقال ، انتقال  
 است . بردار انتقال اخیر برآیند بردارهای انتقالهای مفروض  
 است .

### دوران

۱۷۹ - تعریف - هر گاه زاویه  $\alpha$  و نقطه  $O$  (ش ۱۵)



مفروض باشند و بازاء هر نقطه  $M$   
 از شکل  $F$  نقطه  $M'$  را چنان بدست  
 آوریم که  $OM' = OM$  و  
 $M'O = OM = \alpha$  باشد مجموع نقاط  
 $M'$  شکل  $F'$  را تشکیل میدهند .  
 میگویند  $F'$  از دوران  $F$  باندازه  
 $\alpha$  و در جهت سهم بدست آمده است .

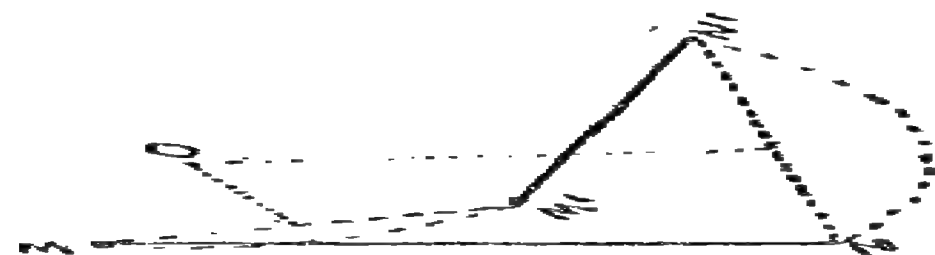
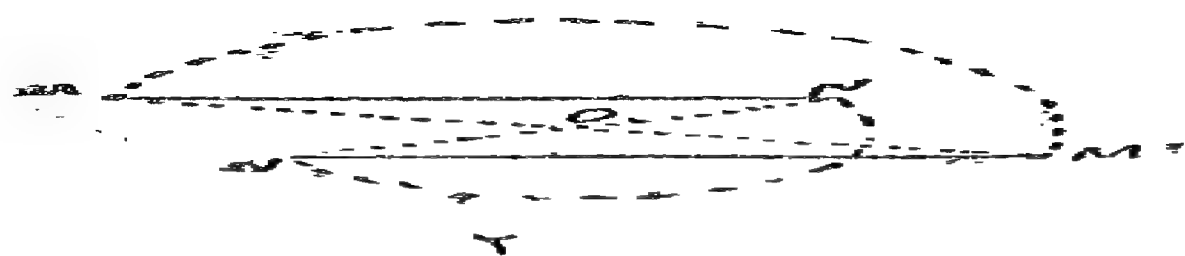
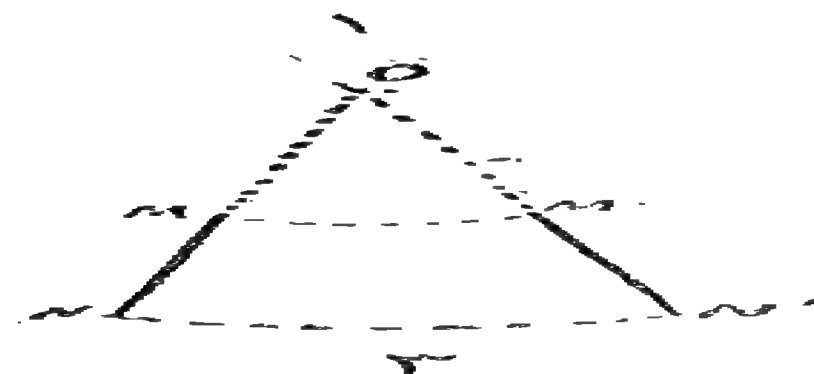
۱۸۰ - قضیه - دوران اجزاء شکل را تغییر نمیدهد .

۱۸۱ - قضیه - هر تغییر مکان در صفحه که در اجزاء

شکل تغییر ندهد يك انتقال یا يك دوران خواهد بود . (ش ۱۶ ،  
 ۱ و ۲ و ۳ و ۴) (در صفحه بعد)

### XV خط و صفحه

۱۸۲ - صفحه نامحدود است و فقط را بدو ناحیه تقسیم



ش ۱۶

۴

- میکنند. پس خطی که از يك ناحیه بناحیه دیگر برود ناچار  
 صفحه را قطع میکند.  
 ۱۸۳ = وضع خط نسبت به صفحه - خط ممکنست :  
 (۱) در صفحه باشد. (۲) با صفحه موازی باشد. (۳) صفحه را  
 قطع کند.  
 ۱۸۴ = قضیه - بر يك خط و يك نقطه فقط يك  
 صفحه میگذرد.  
 ۱۸۵ = نتیجه - صفحه ممکنست یوسيلة ۱) ۲ نقطه ،  
 ۲) يك خط و يك نقطه ، ۳) دو خط متقاطع یا متوازی ،

مشخص شود .

۱۸۶ - وضع دو خط  $\ell$  دو خط ممکنست : ۱) در یک صفحه باشند ، در این صورت یا متقاطعتند یا متوازی . ۲) در یک صفحه نباشند (متناظر)

۱۸۷ - قضیه - یک خط میتواند یک خط بموازات یک خط رسم کرد .

۱۸۸ - قضیه - اگر یکی از دو خط موازی صفحه ای را قطع کند ، دیگری نیز آن صفحه را قطع میکند .

۱۸۹ - قضیه - دو خط موازی با خط سوم یا یکدیگر موازیند .

۱۹۰ - قضیه - خطی که موازی یک خط از صفحه ای باشد با صفحه موازیست .

نتیجه - از یک نقطه خطوط بیشتر بموازات یک صفحه رسم میشوند .

۱۹۱ - قضیه - اگر بر خط  $\triangle$  که موازی صفحه  $P$  است صفحه ای بگذرانیم فصل مشترک دو صفحه موازی  $\triangle$  است .

۱۹۲ - قضیه - خطی که موازی دو صفحه باشد با فصل مشترکشان موازیست .

۱۹۳ - قضیه - فصل مشترک دو صفحه که بر دو خط موازی بگذرند با آن دو خط موازیست .

۱۹۴ - قضیه - فصل مشترک دو صفحه خطیست مستقیم .

- ۱۹۵ - قضیه - هرگاه سه صفحه یکدیگر را دو بسو قطع کنند سه فصل مشترك یا متقاربتند یا متوازی .
- ۱۹۶ - قضیه - فصل مشترك هر صفحه یا دو صفحه متوازی دو خط متوازی‌تند .
- ۱۹۷ - قضیه - از يك نقطه میتوان فقط يك صفحه بسازات صفحه مفروض رسم کرد .
- ۱۹۸ - قضیه - دو صفحه موازی یا يك صفحه یا یکدیگر موازی‌تند .
- ۱۹۹ - قضیه - از يك نقطه میتوان خطوط بیشمار موازی يك صفحه رسم کرد . مکان هندسی آنها صفحه ایست موازی صفحه اول .
- نتیجه ( ۱ ) خطی که با یکی از دو صفحه متوازی موازی باشد با دیگری هم موازی‌ست . ( ۲ ) خطی که یکی از دو صفحه متوازی را قطع کند ، دیگری را هم قطع میکنند .
- ۲۰۰ - قضیه - دو قطعه موازی هم معصور بین دو صفحه متوازی با یکدیگر برابرند .
- ۲۰۱ - قضیه - صفحات متوازی بر روی خطوط قطعيات متناسب جدا میکنند .
- ۲۰۲ - تعریف - زاویه بین دو خط متناظر زاویه ایست که بین دو خط متقاطع متوازی با آنها حادث شود .
- ۲۰۳ - قضیه - دو زاویه که اضلاعشان موازی باشند متساوی‌تند .
- ۲۰۴ - تعریف - خطی را بر صفحه ای عمود گویند وقتی

که بر همه خطوط آن عمود باشد .  
 ۲۰۵ - قضیه - خطی که بر دو خط از صفحه‌ای عمود باشد  
 بر صفحه عمودست .

(نتیجه - ۱) خطی که بر یکی از دو صفحه متوازی عمود  
 باشد بر دیگری هم عمودست . (۲) اگر یکی از دو خط متوازی  
 بر صفحه‌ای عمود باشد دیگری هم عمودست .

۲۰۶ - قضیه - از يك نقطه فقط يك صفحه عمود بر يك  
 خط میتوان کشید .

(نتیجه - ۱) دو صفحه عمود بر يك خط متوازی‌اند . (۲) از  
 يك نقطه و در فضا خطوط بیشمار عمود بر يك خط میتوان رسم  
 کرد ، همه در يك صفحه‌اند .

۲۰۷ - قضیه - همه نقاط واقع بر صفحه‌ای که بر وسط  
 قطعه خطی عمود باشد از دو انتهای قطعه بيك فاصله‌اند .  
 ۲۰۸ - قضیه - از يك نقطه فقط میتوان يك خط بر  
 صفحه عمود کرد .

(نتیجه - دو خط عمود بر يك صفحه متوازی‌اند .

۲۰۹ - قضیه سه عمود - اگر  $\triangle$  بر صفحه‌ای عمود  
 باشد و از موقع آن در صفحه خطی عمود بر يك خط  $D$  واقع  
 در صفحه رسم کنیم و موقع این عمود را  $M$  بنامیم ، خطوط واصل  
 از  $M$  به نقاط مختلف  $\triangle$  همه بر  $D$  عمودند . و بعکس . . .

۲۱۰ - قضیه - اگر از نقطه  $O$  يك عمود و چند مایل بر  
 صفحه‌ای رسم کنیم : (۱) مواضع مایلهای متساوی از موقع عمود

بيك فاصله اند . و يعكس .... ۲) . از دو مایل نامساوی موقع آنكه بزرگتر است از موقع عمود دور ترست . و يعكس . . . . .  
 ۲۱۱ - (تھريث ۱) فاصله نقطه از خط طول عمود يست كه از آن نقطه بر آن خط فرود آيد ۲) فاصله دو خط متناظر طول عمود مشترك آنهاست .

۲۱۲ - چند مسئله مهم - ۱) رسم عمود مشترك  $D$  و  $\triangle$  - بر  $\triangle$  صفحه ای موازی  $D$  میگذرانیم، از يك نقطه  $D$  خطی بر این صفحه عمود میکنیم، از موقع عمود  $D'$  را موازی  $D$  میکشیم تا  $\triangle$  را در نقطه  $O$  قطع کند . از  $O$  خطی موازی عمود رسم مینمائیم، این خط عمود مشترك است ۲) باید از  $O$  خطی موازی صفحه  $P$  رسم کرد تا خط  $\triangle$  را قطع کند - بر  $O$  صفحه ای موازی  $P$  میکشیم تا  $\triangle$  را در  $M$  تلاقی کند .  $OM$  جواب مسئله است . ۳) باید خطی موازی  $D$  رسم کرد تا  $\triangle$  و  $\triangle'$  را قطع کند - بر  $\triangle$  و  $\triangle'$  دو صفحه موازی  $D$  میگذرانیم، فصل مشترکشان جواب مسئله است . ۴) باید بر يك نقطه خطی گذرانند كه دو خط را قطع کند - بر آن نقطه و هر يك از دو خط صفحه ای مرور میدهیم فصل مشترکشان جواب مسئله است .

### XXVI فرجه ها

۲۱۳ - فضای محصور بین دو صفحه متقاطع را فرجه ، هر صفحه را يك روی فرجه ، فصل مشترك دو صفحه را بالی ،



زاویه حادث مابین فصل مشترکهای دوروی فرجه را با صفحه‌ای عمود بر یال مسطحه فرجه می‌گویند. صفحه منصف فرجه، فرجه‌های قائم، تند، باز، مجاور، مجانب، متمم، مکمل و جهت فرجه مساوی الفاظ مشابه خود را در روایا دارند.

۲۱۴ - قضیه - مسطحه‌های فرجه‌های متساوی متساوینند.

۲۱۵ - قضیه - دو فرجه متساوی بر نسبت مسطحه‌های

خود هستند.

نتیجه (۱ -) مقیاس فرجه با مسطحه آن یکی است.

۲۱۶ - قضیه - هر صفحه که بر یک خط از صفحه‌ای

عمود باشد بر آن صفحه عمودست.

(۲) برای اندازه گرفتن فرجه‌ها و ابعادهای زوایا بکار میروند.

۲۱۷ - قضیه - فصل مشترك دو صفحه عمود بر صفحه

سوم بر این صفحه عمودست.

نتیجه - صفحه‌ای که بر فصل مشترك دو صفحه عمود باشد

بر آنها عمود است.

۲۱۸ - هرگاه اضلاع زاویه‌ای بر دوروی فرجه‌ای عمود

باشند آن زاویه مکمل فرجه است.

تصویر در صفحه

۲۱۹ - تصویر نقطه موقع عمود است که از نقطه بر صفحه

خروج آید.

تصویر یک شکل در شکل حادث از مجموع تصاویر نقاط

مختلف آنست.

۲۲۰ - قضیه - تصویر خط مستقیم خطیست مستقیم.

۲۲۱ - قضیه - تصاویر خطوط متوازی متوازی‌اند.

- ۲۲۲ - قضیه - ۱) اگر يك ضلع زاویه قائمه ای با صفحه تصویر موازی باشد تصویر آن هم قائمه است - ۲) اگر تصویر زاویه ای که يك ضلعش با صفحه تصویر موازیست قائمه باشد اقلا يك ضلع آن با صفحه تصویر موازیست .
- ۲۲۳ - میل خط نسبت به يك صفحه زاویه بین خط و تصویرش بر آن صفحه است . شیب خط ظل ( تانوانت ) میل آن میباشد .
- ۲۲۴ - قضیه - میل خط کوچکترین زاویه بین آن خط و خطوط صفحه است .
- ۲۲۵ - قضیه - مسطحه يك فرجه بزرگترین زاویه ایست که اضلاعش بترتیب در دوروی فرجه واقعند .
- تعریف - خطی را که در يك روی فرجه عمود بریال رسم شود خط بزرگترین شیب آن صفحه نسبت به روی دیگری فرجه گویند .
- ۲۲۶ - قضیه - ۱) طول تصویر خط مساویست به طول خود آن ضرب در جیب تمام میلش . ۲) مساحت تصویر يك شكل مسطح مساویست با حاصل ضرب مساحت آن شكل در جیب تمام زاویه حادث بین صفحه شكل و صفحه تصویر .

## XVII تقارن درفضا

- ۲۲۷ - تقارن نسبت به يك نقطه -  $M'$  را قرینه  $M$  نسبت به مرکز تقارن ( ) گویند وقتی که  $O$  وسط  $MM'$  باشد .
- ۲۲۸ - تقارن نسبت به يك خط -  $M'$  را قرینه  $M$

نسبت بمحور تقارن  $\triangle$  گویند وقتی که  $\triangle$  در صفحه‌ای عمود بر وسط  $MM'$  باشد.

رجوع شود به تقارن در صفحه (شماره های ۱۵۳ تا ۱۵۹)

۲۲۹ - تقارن نسبت بیک صفحه -  $M'$  را قرینه  $M$  نسبت به صفحه  $P$  گویند وقتی که  $P$  بر وسط  $MM'$  عمود باشد.

۲۳۰ - دو شکل نسبت بیک مرکز، یک محور یا یک صفحه قرینه یکدیگرند وقتی که جمیع نقاط یکی قرینه نقاط دیگری باشد. اگر در شکلی نقطه‌ای، خطی یا صفحه‌ای بتوان یافت که قرینه هر نقطه شکل نسبت به آن نقطه، خط یا صفحه همچنان بر خود شکل واقع گردد آنهارا مرکز یا محور یا سطح تقارن شکل گویند.

۲۳۱ - هرگاه اجزاء شکلی را بتوان بر اجزاء شکل دیگری که مساوی آنست منطبق نمود دو شکل مساوی و قابل انطباق هستند والا مساویند اما انطباق ندارند.

۲۳۲ - قضیه - ۱) دو قرینه یک شکل نسبت به یک صفحه و یک نقطه از آن صفحه قابل انطباقند - ۲) دو قرینه یک شکل نسبت بدو مرکز قابل انطباقند - ۳) قرینه‌های یک شکل نسبت بیک صفحه و یک مرکز قابل انطباقند - ۴) همچنین قرینه‌های یک شکل نسبت بدو صفحه - ۵) قرینه مرکزی یک جسم ممکنست بر آن قابل انطباق باشد یا نباشد - ۶) قرینه‌های یک جسم نسبت بیک محور یا یک صفحه بر خود جسم قابل انطباق هستند.

۲۲۳ - قضیه - ۱) قرینه هر شکل مستوی نسبت بیک مرکز، یک محور یا یک صفحه با خود آن شکل مساویست - ۲) قرینه یک صفحه، صفحه است ۲) قرینه هر فرجه نسبت بیک صفحه فرجه ایست مساوی با آن اما در جهت مخالف.

۲۲۴ - قضیه - ۱) اگر شکلی دو صفحه تقارن عمود برهم داشته باشد دارای یک محور تقارن (فصل مشترک دو صفحه) است - ۲) اگر شکلی سه صفحه تقارن عمود برهم داشته باشد دارای یک مرکز تقارن (نقطه مشترک سه صفحه) نیز هست.

### XVIII - تجانس در فضا

۲۲۵ - تعریف - هرگاه نقطه  $O$  بنام مرکز تجانسی و عدد  $\lambda$  بنام نسبت تجانسی داده شده باشند مجانسی هر شکل  $F$  نسبت به  $O$  شکل  $F'$  است بطوریکه هر دو نقطه متناظر  $M$  و  $M'$  از آنها با  $O$  بر یک امتداد باشند و  $\frac{OM'}{OM} = \lambda$  باشد. هرگاه  $M$  و  $M'$  در یک طرف  $O$  باشند ( $\lambda$  مثبت باشد)  $F'$  مجانس مستقیم  $F$  و اگر  $M$  و  $M'$  در دو طرف  $O$  باشند ( $\lambda$  منفی باشد) مجانس معکوس آن میباشد.

۲۲۶ - قضیه - ۱) مجانس یک قطعه خط خطی موازی آنست که اگر مجانس مستقیم باشد با آن در یک جهت است و اگر معکوس باشد در جهت مخالف. ۲) زاویه بین دو خط مساوی زاویه بین مجانسهای آنهاست.

( ۳ ) میجانیس خطی که بر مرکز بگذرد بر خود آن خط منطبق است .

( ۴ ) میجانیس صفحه مستوی صفحه مستویست .  
 ۲۳۷ - قضیه - ۱ ) مساحات دو شکل میجانیس بر نسبت مربع دویال متناظر آنهاست .  
 ( ۲ ) حجمهای دو شکل میجانیس بر نسبت مکعب دویال متناظر آنهاست .

۲۳۸ - قضیه - هر گاه شکل  $F$  مرکز تقارن داشته باشد میجانیس آن  $F'$  نیز مرکز تقارنی خواهد داشت . در اینصورت  $F$  و  $F'$  در عین حال میجانیس مستقیم و میجانیس معکوس یکدیگرند و اگر مراکز تقارن آنها را  $C$  و  $C'$  و مراکز تعجانیس مستقیم و معکوسشان  $O$  و  $O'$  و نسبت تعجانیس را  $\lambda$  بنامیم :

$$\frac{OC'}{OC} = \frac{O'C'}{O'C} = \lambda$$

۲۳۹ - قضیه - اگر  $F'$  و  $F''$  میجانیسهای  $F$  با نسبتهای  $\lambda$  و  $\lambda'$  باشند میجانیسهای یکدیگر با نسبت  $\frac{\lambda}{\lambda'}$  نیز هستند .

۲۴۰ - قضیه - ۱ ) اگر سه شکل دو بدو متعجانیس باشند سه مرکز تعجانیس بر يك خط بنام محور تعجانیس واقعند .  
 ( ۲ ) اگر چهار شکل دو بدو و متعجانیس باشند شش مرکز تعجانیس در يك صفحه ، بنام صفحه تعجانیس ، واقعند . چون هر سه شکل از این چهار شكل يك محور تعجانیس دارند چهار شكل چهار محور تعجانیس خواهند داشت که اضلاع يك چهار بر کاملند و رؤس چهار بر کامل شش مرکز تعجانیس چهار شكل میباشند .

قبصره - اگر چهار شکل که مرکز تقارن دارند دو بدو مجانس یکدیگر باشند هر دسته سه تایی آنها چهار محور تجانس (يك محور تجانس مستقیم و سه محور تجانس معکوس) دارند؛ پس دستگاه چهار شکل شانزده محور تجانس دارند که چهار به چهار در هشت صفحه مشخص واقع میباشند.

### XIX - تشابه در فضا

۲۴۱ - جسمی را مشابه جسم دیگر گویند که بامجانس مستقیم آن مساوی باشد. نسبت دو یال متناظر را نسبت تشابه مینامند.

۲۴۲ - قضیه - در دو جسم متشابه (۱) فرجه های متناظر با هم برابرند؛ (۲) یالهای متناظر بر يك نسبتند؛ (۳) وجوه متناظر چندبر های متشابهند.

۲۴۳ قضیه - دو چند روی متشابه را میتوان همواره بچند چهار وجهی متشابه و متشابه الوضیع تجزیه نمود.

۲۴۴ - قضیه - نسبت مساحات دو جسم مشابه مساوی نسبت مربع اضلاع متناظر و نسبت حجمهایشان مساوی نسبت مکعب اضلاع متناظرشان میباشد.

### XX - تغییر مکان در فضا

رجوع شود بشماره های ۱۷۳ تا ۱۸۱

## ۹ - انتقال

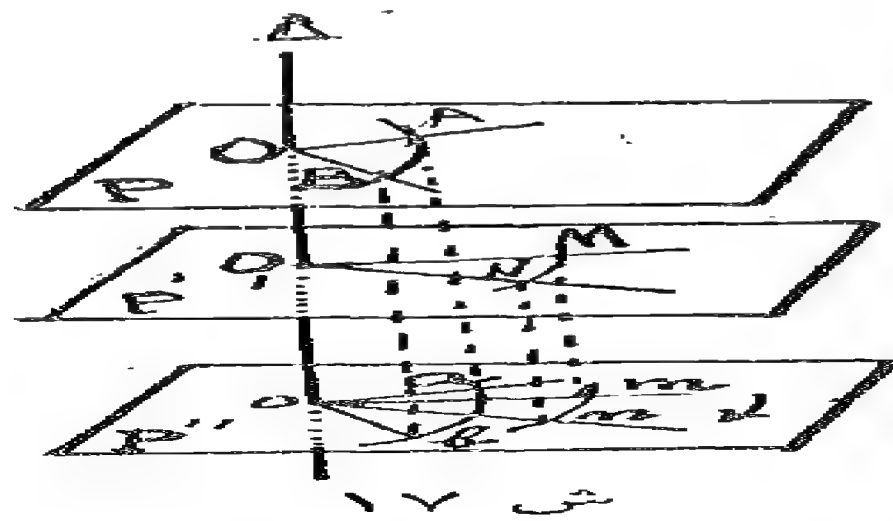
۲۴۵ - قضیه - اگر در تغییر مکان در فضا سه نقطه غیر واقع بر يك امتداد جسمی بر روی سه خط مساوی و مساوی و یکجهت تغییر مکان دهند جسم حرکت انتقالی کرده است و بردار انتقال مساوی و در جهت تغییر مکان یکی از آن سه نقطه است.

نتیجه - انتقال در اجزاء شکل تغییر نمیدهد.

۲۴۶ - چند انتقال را در فضا میتوان بیک انتقال تبدیل کرد. بردار این انتقال مساوی برآیند بردارهای انتقالهای جزء میباشد.

## ۴ - دو و آن

۲۴۷ - تعریف - اگر سه صفحه موازی  $P$  و  $P'$  و  $P''$  (ش ۱۷) فرض نمائیم (۱) دو زاویه  $AOB$  و  $MO, N$  که در دو صفحه  $P$  و  $P'$  واقعند و رؤسشان بر روی خط  $OO$  عمود بر صفحات قرار دارند، در يك جهت هستند اگر تصاویر شان بر روی صفحه  $P''$  در يك جهت باشند. (۲) و نیز دو قوس واقع در صفحات  $P$  و  $P'$  که مراکز شان در روی خطی عمود بر صفحات باشد در



ش ۱۷

يك جهتند وقتی تصاویرشان بر روی  $P''$  در يك جهت باشند .  
 ۲۴۸ - قضیه - هرگاه شکلی حول محور دورانی  
 کند تصاویر تمام نقاط آن بر روی صفحه عمود بر محور در يك  
 جهت و بزوایای متساوی دوران مینمایند .

۲۴۹ - قضیه - هرگاه شکلی در فضا تغییر مکان دهد  
 بطوریکه سه نقطه غیر واقع بر يك امتداد آن بر روی سه صفحه  
 متوازی سه قوس متساوی و در يك جهت بپیمایند و مراکز سه  
 قوس در روی خطی عمود بر این صفحات واقع باشند شکل در  
 فضا دوران کرده است و خطی که بر مراکز قوسها میگذرد محور  
 دوران است .

#### ۴ - محور گت مار پیچی

۲۵۰ - قضیه - هر تغییر مکان هر شکلی که بر روی کره  
 رسم شده باشد ممکنست تبدیل بدوران در حول یکی از قطر  
 های کره شود .

۲۵۱ - قضیه - هر تغییر مکان در فضا که در اجزاء شکل  
 تغییر ندهد منجر بیک انتقال و یک دوران میشود .

۲۵۲ - هر یک از تغییرات محور گت مار پیچی مینامند  
 و يك انتقال بموازات محور دوران شود

#### XXXI چند روها ، منشور ، هرم

۲۵۳ - تعریف - چند رو یا کثیرالوجوه جسمی است  
 که از هر طرف بسطوح مستوی محدود شده باشد . قسمتی از



هر صفحه محدود به حدود جسم را يك رو یا فرجه ، فصل مشترك دو رو را یال ، فصل مشترك دو یال را راس ، فرجه بین هر دورو را يك فرجه جسم میگویند . چند روی گویا آنست که مقطع هر صفحه در آن چند بر گوژ باشد . چند روی منتظم آنست که همه روهایش با هم و همه فرجههایش با هم مساوی باشند . چندروهای منتظم را اجسام افلاطونی میگویند .

۲۵۴ - قضیه اولر - اگر  $n$  عده روس ،  $a$  عده یالها و  $f$  عده روهای يك چند روی گوژ باشند  $2 - f + a = n$  چهار روی منتظم ( ۴ راس و ۶ یال ) ، هشت رو ( ۶ راس و ۱۲ یال ) ، بیست رو ( ۱۲ راس و ۳۰ یال ) . در این سه جسم هر دو سه بر است ؛ مکعب که هر دو آن . مربع است و ۸ راس و ۱۲ یال دارد ؛ دوازده رو که هر دو آن پنج بر است و ۲۰ راس و ۳۰ یال دارد .

۲۵۶ - تعریف - سطح منشوری آنست که از تغییر مکان خطی بنام مولد که همواره بموازات خود تغییر مکان دهد و بر يك چند بر متکی باشد پدید آید . منشور قسمتی از فضا محصور بین يك سطح منشور و دو صفحه مستوی است ، اگر صفحه ها موازی نباشند منشور ناقص ، اگر صفحه ها بر مولد عمود باشند منشور قائم است . مقطع هر صفحه عمود بر مولد منشور را مقطع قائم گویند .

سطح هرم سطحی است که از تغییر مکان خطی بنام مولد که همواره بر نقطه ثابتی بگذرد و بر محیط چند بری

متکی باشد بدید آید. قسمتی از فضا محصور بین چنین سطحی بایک صفحه مستوی راهرم میگویند. درهرم منتظم همه روها سه برهای متساوی الساقین متساویند.

هرم ناقص از قطع کردن یک هرم بایک صفحه بدید میآید. درهرم منتظم ارتفاع هر سه برجانبی و درهرم ناقص منتظم ارتفاع هر دو زنگه جانبی را سه هم میگویند.

۲۵۷ - قضیه - فصل مشترک صفحات متوازی با سطح منشوری چند برهای متساویند.

۲۵۸ - قضیه - سطح بدن منشور مساویست بحاصل ضرب محیط مقطع قائم دریال.

۲۵۹ - قضیه - هر گاه سه روی یکی از کنجهای منشوری با سه روی یکی از کنجهای منشور دیگر متساوی و متشابه باشد، این دو جسم متساویند.

۲۶۰ - قضیه - ۱) در متوازی السطوح: رویهای مقابل موازی و مساوی یکدیگرند. ۲) چهار قطر یکدیگر را در یک نقطه قطع میکنند. ۳) این نقطه مرکز تقارن جسم است.

۲۶۱ - قضیه - هر منشور مایل معادل منشور قائمی است که قاعده اش مقطع قائم و ارتفاعش یال آن باشد.

۲۶۲ - قضیه - ۱) حجم دو مکعب مستطیل که یک یال مشترک داشته باشند بر نسبت حاصل ضرب دو یال دیگر است. ۲) حجم دو مکعب مستطیل که دو یال مشترک داشته باشند بر نسبت یال سوم است.

۲۶۳ - قضیه - ۱) حجم مکعب مستطیل مساویست به حاصلضرب سه یال آن ۲) حجم متوازی السطوح مساویست به حاصلضرب قاعده در ارتفاع ۳) بطور کلی حجم منشور مساویست به حاصلضرب مقطع قائم در یال ( قاعده در ارتفاع ) -

۲۶۴ - قضیه - در هرم منتظم همه روها باهم برابرند -

۲۶۵ - قضیه - هرگاه صفحه‌ای هرم را موازی قاعده قطع کند : ۱) یالها و ارتفاع هرم همه بیک نسبت قطع میشوند؛ ۲) مقطع مشابه قاعده است ۳) نسبت سطح مقطع به سطح قاعده مساوی نسبت مربع دو ضلع متناظر است -

۲۶۶ - قضیه - دو هرم که قاعده‌هایشان معادل و ارتفاعشان مساوی باشد معادل یکدیگرند -

۲۶۷ - قضیه - هرم سه پهلو  $\frac{1}{3}$  منشور سه پهلوئی است که بهمان قاعده و ارتفاع باشد -

نتیجه - حجم هرم مساویست به حاصلضرب قاعده در ارتفاع  $\frac{1}{3}$

۲۶۸ - قضیه - حجم هرم ناقصی بقاعده های  $B$  و  $b$  و ارتفاع  $h$  مساوی  $(B + b + \sqrt{Bb}) \frac{h}{3}$  است -

۲۶۹ - قضیه - حجم منشور ناقص سه پهلو مساویست به حاصلضرب قاعده در  $\frac{1}{3}$  مجموع سه یال -

۲۷۰ - قضیه - حجم منشور ناقص قائمی که قاعده آن چندین منظم  $n$  ضلعی باشد مساویست به حاصلضرب قاعده در طول محور، یعنی خطی که مرکزهای دو قاعده را بهم مربوط میکند -

۲۷۱ - **تهر یف** - شبه منشور جسمی است که دو قاعده آن دو چند بر متوازی و هر يك از وجوه جانبی آن سه بر يك دوزنقه باشد مقطع صفحه ايرا كه يك فاصله از دو قاعده باشد مقطع متوسط گویند .

۲۷۲ - **قضیه** - حجم شبه منشور مساوی است بحاصل ضرب  $\frac{1}{3}$  ارتفاع آن در دو قاعده بعلاوه چهار برابر مقطع متوسط

$$V = \frac{h}{3} (B + b + \epsilon m)$$

## XXII استوانه ، مخروط ، کره

۲۷۳ - **تهر یف** - سطح دوار از دوران يك خط (راست یا خم) تغییر ناپذیر در حول مستقیمی بنام محور پدید می آید . جسم دوار يك سطح دوار محدود است . مدار دایره ایست از سطح دوار که صفحه اش بر محور عمود و مرکزش بر محور منطبق باشد . نصفه ها از مقطع سطح دوار است با هر صفحه که بر محور بگذرد . مماس بر سطح دوار خطیست که بر يك منحنی مرسوم بر روی سطح دوار مماس باشد . صفحه مماس بر هر نقطه از سطح دوار مکان هندسی مماسها نیست که از آن نقطه بر خطوط مختلف مرسوم در سطح دوار رسم شوند . قائم بر سطح دوار در هر نقطه بر صفحه مماس عمود است .

**سطح استوانی** از حرکت مولد بموازات خود و متکی بر يك منحنی هادی بوجود می آید . سطح مخروطی از تغییر مکان خطی که همواره بر نقطه ثابتی گذشته بر منحنی هادی متکی باشد پدید می گردد .

سطح گروی آنست که جمیع نقاطش از نقطه‌ای بنام مرکز بقاصله  $IR$  باشند. کره جسمیست محدود بسطح گروی . دایره بزرگ مقطع کره است باصفحه‌ای که بر مرکز آنست بگذرد . مقطع صفحات دیگر دایره کوچک میباشند . فاصله گروی دو نقطه واقع بر روی کره قوسی است از دایره بزرگی که بر آن دو نقطه بگذرد . منطقه قسمتی از سطح کره است محصور بین دو صفحه موازی ، فاصله این دو صفحه ارتفاع منطقه است . عراقیه یا عرفچه چین منطقه ایست که يك صفحه آن بر کره مماس باشد . قطعه گروی قسمتی از کره محصور بین دو صفحه موازیست . قاعه قسمتی از سطح کره محصور بین دو نیمدایره بزرگ است ؛ زاویه قاعه عبارتست از زاویه بین دو مماس که از نقطه برخورد دو نیمدایره بر آنها رسم شود ؛ قوسی قاعه قوسی از دایره بزرگ است که بر فصل مشترک دو نیمدایره قاعه عمود و با آنها محدود باشد . اکلیل گروی قسمتی از حجم کره محصور بین دو نیمدایره بزرگ است . قطاع گروی جسمیست که از دوران يك قطاع دایره حول قطری از دایره پدید آید . حلقه گروی جسمیست که از دوران يك قطعه دایره حول قطری از کره تولید شود .

۲۷۴- قضیه - همه نصف النهارهای يك سطح دوار با هم مساویند .

۲۷۵- قضیه - ۱) مماسهای بريك نقطه از سطح دوار همه در يك صفحه اند بنام صفحه مماس ۲) قائم بر هر نقطه از سطح دوار بامحور موازیست یا آنرا قطع میکنند.

### ۲۷۶ - استوانه

- ۱- دو قاعده استوانه با هم مساویند .
- ۲- صفحه مماس بر استوانه بر یکی از مولدهای آن میگذرد .
- ۳- استوانه حد منشور محیطی یا متحاطی خود میباشد .
- ۴- سطح بدن استوانه قائم مساویست یا حاصلضرب محیط قاعده در ارتفاع .
- ۵- جسم استوانه قائم مساویست یا حاصلضرب قاعده در ارتفاع .
- ۶- سطح بدن (حجم) استوانه مایل مساویست یا حاصلضرب محیط (سطح) مقطع قائم آن در مولد .
- ۷- در استوانه ناقص مستدیر قائم سطح بدن ( حجم ) مساویست یا حاصلضرب محیط قاعده ( سطح قاعده ) در محور جسم . [ یعنی خطی که از مرکز قاعده موازی مولد رسم شود ] .
- ۸- مقطع استوانه مستدیر با هر صفحه که موازی قاعده باشد دایره و با هر صفحه دیگر بیضی است ،

### ۲۷۷ - مخروط

- ۱- مقطع مخروط مستدیر با هر صفحه که با قاعده موازی باشد دایره ، با هر صفحه که موازی قاعده یا يك مولد نباشد بیضی ، با هر صفحه که موازی يك مولد باشد سهمی و با هر صفحه که مخروط و امتداد آنرا در آن طرف رأس قطع کند هذلولی میباشد ( رجوع شود به مخروطات ) .
- ۲- صفحه مماس بر مخروط بر يك مولد آن میگذرد .

۳- مخروط حدهرم محیطی و محیطی خود میباشد .

۴- سطح بدن مخروط مساویست به حاصلضرب محیط قاعده در نصف سهم .

۵- حجم مخروط مساویست به حاصلضرب سطح قاعده در ثلث ارتفاع .

۶- مخروط ناقص حد هرم ناقص محیطی و محیطی خود میباشد .

۷- اگر شعاعهای دو قاعده مخروط ناقص را  $R$  و  $r$  ، سهم آنرا  $l$  و ارتفاعش را  $h$  فرض کنیم :

$$\text{حجم} = \pi \frac{h}{3} (R^2 + r^2 + Rr)$$

$$\text{سطح کل} = \pi [R^2 + l(R + r)] \quad \text{سطح بدن} = \pi l(R + r) \quad \text{۲۷۸- کره}$$

۱- مقطع هر صفحه در کره دایره ایست که مرکزش موقع عمودیت که از مرکز کره بر صفحه قاطع فرود آید . اگر شعاع کره  $R$  ، شعاع دایره مقطع  $r$  و فاصله این صفحه از مرکز کره  $d$  فرض شوند:

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

۲- هر خط کره را فقط در دو نقطه قطع میکنند .

۳- قطر عمود بر سطح هر دایره کره ، جسم را در دو نقطه  $P$  و  $P'$  قطع میکند که دو قطب دایره نام دارند . جمیع نقاط هر دایره از هر يك از دو قطب يك فاصله اند .

۴- در يك کره دایره های متساوی از مرکز يك فاصله اند و به یکس .

- ۵- در يك كره از دایره‌های نامساوی آنكه بزرگتر است  
بیشتر كثر نزدیكتر است و بعكس .
- ۶- صفحه مماس بر كره با آن فقط يك نقطه مشترك  
دارد و بر شعاع نقطه تماس عمود است .
- ۷- بر يك چهارروى منتظم میتوان يك كره محیط و در  
آن يك كره محیط كرد . اگر یال آن را  $a$  بنامیم :
- $$\frac{a\sqrt{2}}{2} = \text{شعاع كره محیطی} = \frac{a\sqrt{2}}{4} = \text{شعاع كره محیطی}$$
- ۸- کوتاه ترین راه بین دو نقطه واقع بر روی كره قوسی  
است از دایره بزرگ .
- ۹- برای تعیین شعاع كره باین راه عمل میکنیم :
- دو نقطه  $M$  و  $N$  از سطح كره را مركز قرار داده با فاصله‌های  
قطبی اختیاری قوسهایی ( دوبدو یا شعاعهای متساوی ) رسم  
میکنیم تا از برخورد آنها سه نقطه  $A$  و  $B$  و  $C$  ( که واقعند  
بر محیط يك دایره بزرگ ) بدست آیند . باین کار روی طولهای  
 $AB$  و  $AC$  و  $BC$  را بر روی صفحه کاغذ نقل میکنیم و با این  
سه طول مثلثی میسازیم . دایره محیطی این مثلث مساوی دایره  
بزرگ از كره مخروط و شعاعش مساوی شعاع كره است .
- ۱۰- مساحت سطح حادث از دوران قطعه خط راستی در حول  
محوری که با آن در يك صفحه باشد مساویست بحاصل ضرب  
تصویر قطعه خط بر محور در محیط دایره ای که شعاع آن عمودی  
باشد که بر وسط قطعه خط اخراج و محور محدود گردد .
- ۱۱- حجم حادث از دوران مثلثی حول محوری که در



صفحه A نیست و بزرگ رأس آن میگذرد و ضلع مقابل بآن رأس را قطع نمیکند مساویست به حاصلضرب سطح حادث از دوران ضلع مقابل در  $\frac{1}{2}$  ارتفاع وارد بر این ضلع .

$$4\pi R^2$$

۱۲- سطح کره مساویست به

$$\frac{\pi}{4} d^2 = \frac{4}{3} \pi R^2 \quad \text{« « «}$$

۱۴- اگر دو صفحه موازی بفاصله h کره ای بشمار R را قطع و در آن دو دایره بشمارهای r و r' ایجاد کند :

$$2\pi Rh = \text{سطح منطقه حادث}$$

$$\text{حجم قطعه کروی حادث} = \frac{\pi}{4} h^3 + \frac{\pi}{4} (r^2 + r'^2) h$$

$$\text{حجم قطاع کروی} = 2\pi Rh \times \frac{R}{r} = \frac{4}{3} \pi R^2 h$$

۱۵- اندازه زاویه قایح قوس مقابل قایح است.

۱۶- اگر قوس قایح را  $\alpha$  فرض کنیم در کره ای بشمار R :

$$\text{سطح قایح} = 4\pi R^2 \frac{\alpha}{360} = \pi R^2 \frac{\alpha}{90}$$

$$\text{حجم اکیلل} = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{\alpha}{360} = \pi R^3 \frac{\alpha}{270}$$

۱۷- حجم حلقه کروی حادث از دوران قطعه دایره ای حول یک قطر دایره مساویست یا نصف حجم مخروطی که شعاع قاعده اش وتر قطعه دایره و ارتفاعش تصویر این وتر بر محور دوران باشد . پس اگر قطعه را AB و طول تصویر

آنرا  $A'B'$  فرض کنیم :

$$A'B' \cdot AB^2 = \frac{\pi}{4} \text{ حجم حلقه}$$

### XX سه بر کروی

۲۷۹ - تعریف - چند بر کروی قسمتی است از سطح کره محدودیچند قوس ازدوایر بزرگ .



(ش ۱۸) هر يك از قوسهای دایره بزرگ مانند  $AB$  را يك پهلوی ، نقطه تلاقی دو پهلوی را يك راس و گوشه بین هر دو پهلوی را يك گوشه چند بر کروی گویند . پس پهلوهای چند بر کروی را هم با اتحاد قوس و زاویه اندازه میگیرند .

کنج فظیر يك چند بر کروی آنست که راسش مرکز کره و یالهای آن منتهی بروس چند بر باشند .  
سه بر کروی ساده ترین چند بر هاست .

سه بر قریب سه بر مفروض آنست که راسش انتهای اقطار میباشد که بر روس سه بر مفروض یگنذرند . سه بر کروی ممکنست سه گوشه راسست یا باز داشته باشد . سه بر قریبی سه بر آنست که هر راس سه بر مفروض قطب يك ضلع آن باشد .  
درجه کروی سه بری است که دو پهلوئی آن  $90^\circ$  و يك پهلویش  $1^\circ$  درجه باشد . اگر از مجموع زوایای يك سه بر کروی  $2$  قائمه کم کنیم تفاضل را فضل کروی آن سه بر گویند .

۲۸۰ - قضیه - پهلوهای چندبرکروی مساوی‌روهای کنج نظیرش و گوشه‌های آن مساوی فرجه‌های اینست .

۲۸۱ - قضیه - درسه‌برکروی هر پهلو کوچک‌ترست از مجموع و بزرگ‌ترست از تفاضل دو پهلوئی دیگر .

۲۸۲ - قضیه - مجموع پهلوهای سه‌برکروی کوچک‌ترست از چهارقاعده

۲۸۳ - قضیه - دوسه‌برکروی قرینه معادلند .

۲۸۴ - قضیه - اگر یک سه‌برکروی قطبی سه‌بردیگر باشد دومی نیز قطبی اولی است .

۲۸۵ - قضیه - هر گوشه یک سه‌برکروی متمم پهلوئی مقابل براس نظیرش درسه‌بر قطبی آنست .

۲۸۶ - قضیه - مجموع گوشه‌های سه‌برکروی واقعست بین ۲ و ۶ قاعده .

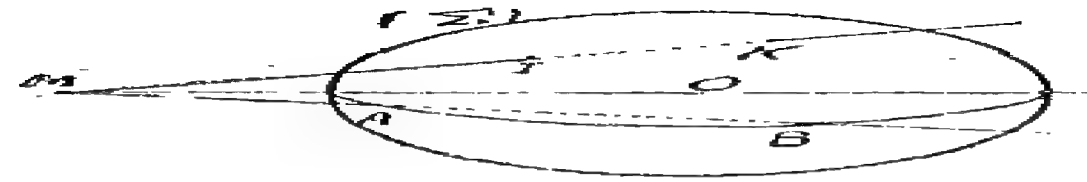
۲۸۷ - قضیه - نسبت مساحت سه‌بر به سطح کره مساوی نسبت فضل کروی آنست به ۸ قاعده .

نتیجه (۱) مساحت سه‌برکروی نصف حاصلضرب فضل کروی آنست در مساحت دایره بزرگ :

$$S = \frac{1}{4} \pi R^2 (A + B + C - 180)$$

(۲) اگر سه‌بر سه‌قائمه‌را که  $\frac{1}{8}$  کره است واحد سطح و زاویه قائمه را واحد زاویه بنامیم سطح سه‌بر مساویست با فضل کروی آن .

XXIV قوت نقطه نسبت بکره



۲۸۸- هر گاه از نقطه  $M$  ، بقاصلة  $d$  از مرکز کره  $\Sigma$  (ش ۱۹) ، قاطعه غیر مشخصه‌ی م‌روددهیم تا کره را در  $A$  و  $K$  قطع کند  $MI \cdot MK$  مقدار یست ثابت و مساوی  $d^2 - R^2$  .

مقدار  $P$  را قوت نقطه  $M$  نسبت به کره  $\Sigma$  گویند. برای تکمیل رجوع شود به شماره ۱۱۹

۲۸۹ . قضیه — مکان نقاطی که نسبت بدو کره يك قوه داشته باشند صفحه ایست ، بنام صفحه اصلی ، و دیر خط المרכזین که خط المרכזین را در  $H$  قطع کند و

$$OH = \frac{OO'}{2} + \frac{r^2 - r'^2}{2OO'}$$

باشد ( در دو کره متقاطع ، مماس یا متحد المרכז صفحه اصلی بترتیب صفحه تقاطع آنها ، صفحه مماس مشترک آنها یا صفحه ای واقع در بی نهایت است ) .

فصل پنجم ( ۱ ) سه صفحه اصلی سه کره یکدیگر را بر يك خط ، بنام محور اصلی سه کره ، تلاقی میکنند . ( ۲ ) شش صفحه اصلی چهار کره که مراکزشان در يك صفحه نباشند بر يك نقطه ، موسوم به هرگز اصلی چهار کره ، میگذرند .

## XXV قطب و قطبی

۹- در صفحه (قطب و قطبی نسبت بدایره)

۲۹۰- هر یقین- مکان هندسی مزدوجهای توافقی يك نقطه

$P$  را نسبت بدوانتهای قاطع متحرکی که بر  $l$  بگذرد و دایره  $(C)$  را در  $M$  و  $N$  قطع کند، قطبی  $P$  نسبت به  $(C)$  گویند.

۲۹۱- قضیه- قطبی نقطه  $P$  نسبت بدایره  $(C)$  خطی

است مانند  $p$  عمود بر  $PO$  که  $OP$  را در  $H$  تلاقی کند و

$OH = R^2$  باشد.

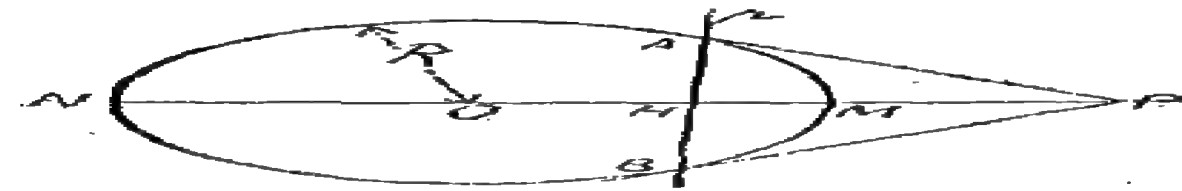
بر حسب آنکه  $P$  خارج یا

داخل دایره یا روی دایره باشد

قطبی آن دایره را قطع میکند،

دو خارج آن یا در  $P$  مماس بر آن

است.  $P$  را قطب خط  $p$  گویند.



۲۹۲- قضیه- قطب هر خط که بر نقطه ای بگذرد بر

قطبی این نقطه قرار دارد و بالعکس قطبی هر نقطه که بر خطی

واقم باشد بر قطب این خط میگذرد.

۴۹۴- اشکال قطبی معکوس- اگر چند بر  $ABCDE$

و دایره  $(C)$  در صفحه ای مقروض باشند و چند بر  $A'B'C'D'E'$

را بدست آوریم بطوریکه هر ضلع این قطبی يك رأس آن

باشد، هر ضلع آن نیز قطبی يك رأس این خواهد بود. چنین

دو شکل را قطبی معکوس یکدیگر گویند.

اگر در شکلی چند نقطه بر يك خط باشند در قطبی

معکوس آن چند خط بر يك نقطه میگذرند . از این خاصیت برای اثبات قضایای مربوط به خطوط متقارب یا نقاط واقع بر يك خط ممکنست استفاده شود .

۴- در قضیه قطب و قطبی نسبت بکره

۴۹۴- تعریف - مثل شماره ۲۹۰

۴۹۵- قضیه - قطبی يك نقطه  $P$  نسبت بکره صفحه ایست مانند  $(\pi)$  عمود بر خط  $OP$  که  $T$  را در  $H$  قطع کند و  $OP \cdot OH = R^2$  باشد .

(بقیه مانند شماره ۲۹۱)

۴۹۶- قضیه - قطب هر صفحه که بر نقطه ای بگذرد بر صفحه قطبی این نقطه واقع است و صفحه قطبی هر نقطه که بر صفحه ای واقع باشد بر قطب این صفحه میگذرد .

نتیجه - قطب های جمیع صفحاتی که بر خط  $D$  میگذرند بر يك خط مانند  $D^?$  واقعند این خاصیت متقابل است . باینجهت  $D$  و  $D^?$  را دو خط مزدوج نسبت بکره  $(S)$  گویند . هر يك از دو خط مزدوج در صفحه ایست که از مرکز کره بردیگری عمود شود . عمود مشترك آنها بر مرکز کره میگذرد و آنها را در  $k$  و  $k^?$  قطع میکند و  $Ok \cdot Ok^? = R^2$  است .

## XXVI انعکاس

۵- در صفحه

۴۹۷- تعریف - اگر نقطه  $O$  و شکل  $F$  مقروض باشند و از  $O$  به  $A$  و  $B$  و  $C$  . . . نقاط مختلف  $F$  وصل کرده در

روی خطوط واصل نقاط  $A'$  و  $B'$  و  $C'$  و  $O$  را بدست آوریم  
یقه می که :

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC' = \dots = p$$

باشد از مجموع نقاط  $A'$  و  $B'$  و  $\dots$  شکل  $I''$  منتهی  
شکل  $I''$  نسبت به مرکز آنهکس  $O$  با قوت آنهکس  $p$  بدست  
می آید . اگر هر دو نقطه متناظر در یکطرف  $O$  باشند  $p$  مثبت  
و اگر نه منفی است . هر دو نقطه متناظر را منتهی یکدیگر  
میگویند .

هرگاه  $p > 0$  باشد و مرکز  $O$  و شعاع  $\sqrt{p}$  دایره ای رسم  
کنیم ، این دایره را ، که مکان تقاطع است که بر منتهی خود  
منطبقند ، دایره آنهکس می نامید .

۴۹۸ - نتیجه (۱) دو نقطه منتهی نسبت به دایره  
آنهکس مزدوج یکدیگرند (۲) بین  $AB$  و  $A'B'$  خطوط  
واصل بین دو نقطه  $A$  و  $B$  و دو منتهی آنها این رابطه  
برقرار است :

$$A'B' = AB \times \frac{p}{OA \cdot OB}$$

(۳) دو نقطه  $A$  و  $B$  با منتهیهایشان  $A'$  و  $B'$  بر روی  
یک دایره قرار دارند .

۴۹۹ - قضیه - مماسهای بر دو منتهی منتهی در دو  
نقطه منتهی  $A$  و  $A'$  با خط  $AA'$  زوایای مساوی میسازند  
نتیجه - منتهی هر زاویه با آن مساویست .

۴۴۰ - قضیه - اگر  $I''$  و  $I'''$  منتهیهای  $I''$  با قوتهای

۳۰۹ - قضیه ۱ - منعکس دایره ای که بر مرکز انعکاس بگذرد خط‌پست عمود بر قطری که بر مرکز انعکاس می‌گذرد. ۲ - منعکس هر خط دایره ایست که بر مرکز انعکاس مرور کند. (اگر خط بر مرکز انعکاس بگذرد منعکس آن بر خودش منعطف است)

۳۰۲ - قضیه - منعکس هر دایره (که بر  $O$  نگذرد)

۳۰۳ - قهری بخشها مانند شماره ۲۹۷ خواص شماره ۲۹۸ در فضا نیز صحیح است .

۳۰۴ - قضیه ( ۱ ) منعکس هر کره که بر مرکز آن عکاس بگذرد صفحه است عمود بر قطری که بر مرکز آن عکاس مرود نماید . ( ۲ ) منعکس هر کره که دیگر است . ( ۳ ) منعکس هر صفحه که ایست که بر مرکز آن عکاس میگذرد .

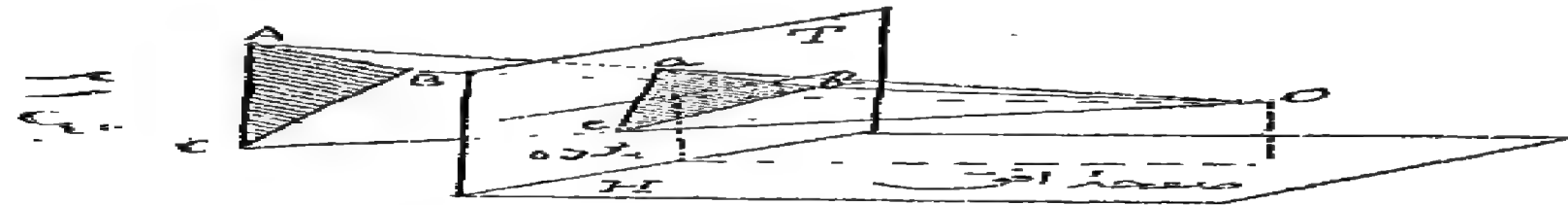
۳۰۵ - قضیه - منعکس هر دایره نسبت بیک نقطه



در صفحه دایره نباشد دایره است .  
 دایره اخیر را تصویر در مرکز گزی proj.stéréographique  
 دایره اولی نسبت به مرکز تصویر  $O$  میگویند  
 (نتیجه - ۱) اگر قاعده مخروط مستدیری بر روی کره ای  
 باشد این کره مخروط را در دایره دیگری هم قطع می‌کند (۲)  
 بر هر دو دایره واقع بر یک دایره عموماً میتوان دو مخروط  
 گذارند .

### xxvii - مناظر و مرایا (پرسپکتیو)

۳۰۶ - تهریفه - در شکل  $I$  و  $F'$  را گویند نسبت به یکدیگر  
 در وضع منظری هستند ، یا یکی تصویر در مرکز گزی یا تصویر در  
 مخروطی یا پرسپکتیو دیگریست هر گاه هر نقطه و نقطه  
 متناظر آن یا نقطه ثابتی مانند  $O$  بر یک امتداد باشند . نقطه  
 $O$  را مرکز تصویر یا نقطه دید میگویند . پرده صفحه ایست  
 که بخواهیم پرسپکتیو



جسمی را بر روی آن  
 رسم کنیم (ش ۲۱) -  
 $P$  موقع عمودی را  
 که از نقطه دید بر پرده

فروود آید نقطه اصلی و فاصله  $P$  را فاصله اصلی و خط  $II-I'$   
 که از نقطه اصلی موازی سطح افق رسم شود خط افق و  
 دو نقطه  $I$  و  $I'$  را که بر روی  $II-I'$  بقاصله ای مساوی فاصله  
 اصلی از  $P$  اختیار شوند نقاط مسافت میگویند .

پرسپکتیو هر نقطه مانند  $A$  نقطه  $A'$  محل تلاقی شعاع دید  $OA$  — با پرده.

پرسپکتیو هر خط مانند  $AB$  خط  $A'B'$  فصل مشترك صفحه  $OAB$  است با پرده.

نقطه گریز — هر گاه از  $O$  خطی موازی  $AB$  رسم کنیم تا پرده را در  $f$  قطع کند  $f$ ، که پرسپکتیو نقطه بی نهایت دور خط  $AB$  است، نقطه گریز  $AB$  نامیده میشود،

خط گریز — هر گاه از  $O$  صفحه ای موازی صفحه  $ABC$  رسم کنیم تا پرده را بر خط  $F$  قطع کند  $F$ ، که پرسپکتیو خط بی نهایت دور صفحه  $ABC$  است، خط گریز آن صفحه نامیده میشود. صفحه ای را که موازی پرده رسم شود جبهه می نامند.

۳۰۷- قضیه — پرسپکتیوهای خطوط موازی بر يك نقطه میگذرند (نقطه گریز مشترك آنها) .  
 نتیجه — اگر خطوط موازی با پرده هم موازی باشند پرسپکتیوهای آنها متوازییند.

۳۰۸- قضیه — خطوطی که یکدیگر را در روی صفحه جبهه مار بر نقطه دید تلاقی کنند پرسپکتیوهایشان متوازییند.  
 ۳۰۹- قضیه — نقاط گریز خطوط افقی در روی خط افقی  $FIF'$  قرار دارند.

حالات خاص — نقاط گریز خطوط افقی که با پرده زاویه  $90^\circ$  تشکیل میدهند نقاط مسافت  $D$  و  $D'$  هستند.

۳۱۰ قضیه - ۱ ) پرسپکتیو دایره يك قطع مخروطی  
( بیضی ، هذلولی یا شلجمی ) است ۰ ۲ ) پرسپکتیو يك قطع  
مخروطی ممکنست دایره باشد .

### XXVII مارپیچ Helice

۳۱۱ — تعریف اگر زاویه ای مانند  $\alpha$  حول استوانه  
مستدیر قائمی چنان پیچید که يك ضلع آن بر قاعده منطبق  
شود ضلع دیگر بر تنه استوانه خمی ترسیم میکند که مارپیچ  
یا حلزونی نام دارد . ( ش ۲۲ )



ش ۲۲

چون استوانه و اضلاع  
زاویه نامحدودند مارپیچ  
هم بی پایان میباشد . محور  
و شعاع استوانه را جان  
ame و شعاع مارپیچ و  
خط زاویه  $\alpha$  را شیب آن

گویند . نقطه A مبدأ مارپیچ است فاصله دو نقطه مارپیچ  
واقع بر يك مولد مانند A و D را گام مارپیچ مینامند قسمت  
MP از مولد محدود بین يك نقطه M از مارپیچ و قاعده  
استوانه را عرض نقطه M و قوس AP واقع بین مبدأ و نقطه  
P ، تصویر M ، را طول منحنی نقطه M میگویند . قسمتی  
از مارپیچ که فاصله دوسر آن يك گام باشد یعنی از يك دور  
کامل تشکیل شده باشد يك پیچ نام دارد .

پیچ ممکنست بر است dextrorsum (ش ۲۳) یا  
 پیچ sinistrorsum (ش ۲۴) باشد یعنی در قسمت مرئی استوانه  
 بطرف راست یا بطرف چپ بالا برود .



(ش ۲۳) (ش ۲۴)

۳۱۲ — قضیه — عرض هر نقطه مارپیچ متناسب است  
 با طول منحنی آن نقطه . این نسبت مساوی شیب مارپیچ است  
 تهریف — از قضیه فوق این تهریف برای مارپیچ نتیجه  
 میشود : مارپیچ منحنی ایست که بر استوانه قائم مستدیری پیچیده  
 شده باشد و عرض هر نقطه آن متناسب با طول منحنی آن  
 نقطه باشد .

۳۱۳ — مارپیچهای واقم بر یک استوانه یا استوانه‌های  
 متساوی را که در یک جهت بوده و شیبشان با هم برابر باشد  
 متساوی گویند .

۳۱۴ — مماسی بر مارپیچ — قضیه — بر هر نقطه از  
 مارپیچ مماسی میتوان رسم کرد . تصویر آن بر صفحه قاعده  
 استوانه مساوی طول منحنی نقطه تماس است .

۳۱۵ — نتیجه — میل مماسهای بر مارپیچ با صفحه  
 قاعده مقدار یست ثابت .

## ۳۱۶ — معادله مارپیچ

$$y = kx = \frac{h}{2\pi r} x \quad (h = \text{گام})$$

۳۱۷ — قضیه — کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه از سطح استوانه ( مستدیر قائم ) قوسی از مارپیچ است .

## منحرف و طائت

## ۱ - بیضی

۱ — تعریف بیضی مکان نقاطیست که مجموع فواصلشان از دو نقطه ثابت  $F$  و  $F'$  مساوی مقدار ثابت  $2a$  باشد -  
 $F$  و  $F'$  را دو کانون،  $FF' = 2c$  را فاصله کانونی،  $O$  وسط  $FF'$  را مرکز، خط  $AA'$  را که بر  $F$  و  $F'$  می‌گذرد و دو انتهای آن  $A$  و  $A'$  از  $O$  بفاصله  $a$  هستند محور ا طول، خط  $BB'$  را که از  $O$  بر  $AA'$  عمود شود و دو انتهای آن  $B$  و  $B'$  از نقطه  $O$  بفاصله  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$  باشند محور ا قصر،  
 $A$  و  $A'$  و  $B$  و  $B'$  را چهار رأس، نسبت  $\frac{c}{a} = e$  را خروج از مرکز، دایره‌ای را که بر مرکز  $O$  و شعاع  $OA = a$  رسم شود دایره اصلی، دو دایره را که بر مراکز  $F$  و  $F'$  و شعاع  $a$  رسم شوند دایره‌های و هر خطی را که از یک کانونت بیاید نقطه  $N$  از بیضی وصل شود شعاع حامل می‌نامند .

۴- رسم بیضی - ۱) با حرکت متصل - دو مستیاق در دو کانون کوبیده دوانتهای نخی بهاول  $2a$  -  $2c$  را کمره میزنیم نخ را از پشت مستیاقها رد میکنیم و نوک مدادی را در داخل آن چنان حرکت میدهیم که نخ همیشه کشیده شده باشد نوک

مداد بیضی رسم میکند (ش ۱) - ۲) با نقاط یا بی  $1^o$  را مرکز قرار داده با شعاع  $2a$  قوسی رسم می-کنیم بعد بر  $1^o$  و شعاع  $2c$  قوسی میزنیم تا قوس اول را در  $M$  و  $M'$  قطع کند. این



نقاط متعلق به بیضی هستند. ۳) رسم بیضی با کشیدگانه اگر  $OA$  و  $OB$  نیمی از محورهای بیضی باشند (ش ۲) بر روی لبه کاغذی مانند  $PM$  و  $P'M'$  خطوطی

$PM$  و  $P'M'$  را بترتیب مساوی و جدا میکنیم و بعد کاغذ را بر صفحه چنان میگذاریم که  $P$  و  $P'$  بر  $1^o$  و  $P'$  بترتیب بر  $1^o$  و  $A$  و  $B$  (پایه‌های آنها) باشند.  $M$  در وقت پیچیدن به هر



مکان میدهد (رجوع شود به شماره ۱) -

توضیح - کشیدگانه کاغذی را به صورت  $1^o$  و  $1'$  به هم وصل می-کنیم و یک نقطه از بیضی معلوم می-کنیم و آن را با یک خط  $1^o$  که اگر  $OA$  نصف محور عمودی و  $M$  نقطه مساوی  $1^o$  باشد به  $1^o$  وصل می-کنیم و شعاع  $2a$  قوسی میزنیم تا قوس اول را در  $M$  و  $M'$  قطع کند. این



$M$  و  $MF'$  قطع میکنند .  $M$  و  $M'$  جوابهای مسئله‌اند (اگر  $I$  روی دایره هادی  $I'$  واقع شود خط با بیضی مماس است و اگر  $I$  در درون دایره هادی افتد خط بیضی را قطع نمیکند) .

مماس بر بیضی

۷- قضیه - مماس بر هر نقطه از بیضی گوشه بین يك شعاع حامل و امتداد شعاع دیگر را نصف میکند .

نتیجه — (۱) قرینه هر کانون نسبت به مماس بر روی دایره هادی کانون دیگر است (۲) مماس بر هر رأس عمودست بر محور .

۸- قضیه — قائم بر هر نقطه از بیضی گوشه بین دو شعاع حامل را نصف میکند .

نتیجه — مماس و قائم بر هر نقطه از بیضی  $FF'$  را به نسبت توافقی تقسیم میکنند .

۹ — قضیه —  $La Fire$  — تصویر هر کانون بر روی مماس واقعست بر روی دایره اصلی .

۱۰ — رسم مماس بر بیضی — (۱) از نقطه واقع بر بیضی : دو شعاع حامل را میکشیم ، منصف گوشه خارجی آنها مماس مطلوبست .

(۲) از نقطه  $P$  خارج بیضی : بر کز  $P$  و شعاع  $PF$  دایره‌ای میزنیم تا دایره هادی  $F'$  را در  $\varphi$  و  $\varphi'$  قطع کند ، عمودهایی که از  $P$  بر  $F\varphi$  و  $F'\varphi'$  فرود آیند دو مماس مطلوبند (شرط



امكان متقاطع بودن دایره مرسوم با دایره هادی  $I^2$  است، یعنی باید  $I$  بیرون بیضی باشد.)

(۳) مماس موازی امتداد  $\Delta$  : از  $I^2$  عمودی  $\perp$   $\Delta$  فرود می آوریم تا دایره هادی  $I^2$  را در  $\varphi$  و  $\varphi'$  قطع کند، عمود منصف های  $I\varphi$  و  $I\varphi'$  را رسم می نماییم. مسئله همیشه دو جواب دارد.

۱۱ — نتیجه — وتر واصل بین نقاط تماس دو مماس موازی بر مرکز بیضی میگذرد.

۱۲ — قضیه Poncelet (۱) اگر از  $P$  دو مماس بر بیضی رسم شود این دو مماس با  $PF$  و  $PF'$  گوشه های مساوی میسازند. (۲) خطی که از  $P$  یکی از دو کانون وصل شود منصف گوشه اشعه حاملی است که از این کانون بدو نقطه تماس منتهی گردند.

۱۳ — قضیه — مماس متحرکی که بین دو مماس ثابت بر بیضی محدود باشد از هر کانون بزائیه ثابتی دیده میشود.

۱۴ — قضیه — مکان نقاط برخورد دو مماس متعامد بر

بیضی دایره ایست بر مرکز  $O$  و شعاع  $\sqrt{a^2 - b^2}$

۱۵ — قضیه — (۱) حاصلضرب فواصل دو کانون از هر مماس مساویست با  $b^2$  (۲) اگر از یک کانون خطی موازی مماس رسم کنیم تقاضل مربعات فواصل مرکز از مماس و از خط مرسوم مساویست با  $b^2$

۱۶ - قضیه Chasles - مکان نقاط برخورد دو مماس متعامد بر دو بیضی متحدالکانونین به محورهاى  $a$  و  $b$  و  $a'$  و  $b'$  دایره ایست به مرکز  $O$  و شعاع :

$$\sqrt{a'^2 + b^2} \quad \text{یا} \quad \sqrt{a^2 + b'^2}$$

شعاعهای حامل - معادله بیضی

۱۷ - قضیه - شعاعهای حامل هر نقطه  $M$  از بیضی که فاصله تصویر آن بر محور اطول از مرکز بیضی  $x$  فرض شود به ترتیب عبارتند از

$$a - \frac{cx}{a} \quad \text{و} \quad a + \frac{cx}{a}$$

۱۸ - قضیه - اگر محاورهای بیضی محورهای مختصات فرض شوند (محور را طول محور طولها) معادله بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

عبارتست از

بیضی تصویر دایره است

۱۹ - قضیه - تصویر قائم دایره بر صفحه بیضی ایست که طول محور اطول آن  $a$  و طول محور اقصی آن  $a \cos \alpha$  (زاویه بین صفحه دایره و صفحه تصویر) میباشد.

۲۰ - قضیه - مساحت بیضی مساویست با  $\pi ab$

نتیجه - برای بدست آوردن مساحت هر جزء از بیضی باید مساحت جزء نظیر آن را در دایره اصلی بدست آورد و در  $\frac{b}{a}$  ضرب کرد .

۲۱ - قضیه - نسبت عرض نقاط مختلف بیضی به عرض

نقاط نظایر آنها از دایره اصلی مساوی مقدار ثابت  $\frac{b}{a}$  است. ( نقطه نظایر  $T$  نسبت که با نقطه مفروض در روی عمودی بر  $A.A'$  واقع باشند )

۴۴ - رسم مماسی - ۱) از يك نقطه  $M$  واقع بر بیضی - نظایر نقطه مفروض را بر روی دایره اصلی پیافته از آن مماسی بردایره اصلی رسم میکنیم و از محل تقاطع این مماس با محور اطول بیضی به  $M$  وصل میکنیم. ۲) از نقطه  $M$  خارج بیضی - نقطه  $M'$  را که عرض آن  $\frac{b}{a}$  عرض  $M$  باشد یافته

از آن مماس  $M'I'$  را بردایره اصلی رسم میکنیم تا محور اطول را در  $I$  قطع کند  $MI$  مماس بر بیضی است و نقطه تماس واقع است در روی عمودی که از  $T'$  بر محور اطول فرود آید. ۳) مماس موازی امتداد  $\triangle I$  - فصل مشترك  $\triangle$  را با محور اطول بدست آورده نقطه  $M'$

را هم که عرض آن  $\frac{b}{a}$  است نقطه  $M$  از  $\triangle$  باشد تعیین میکنیم بردایره اصلی مماسهایی موازی  $M'I'$  میکشیم و در روی عمود هائی که از نقاط تماس بر محور اطول فرود آیند نقاطی که عرضشان به عرض نقاط مماس بر نسبت  $\frac{b}{a}$  باشد تعیین نموده از این نقاط خطوطی متوازی  $\triangle$  رسم میکنیم.

II هندلوی

۴۴ - تعریف - هندلوی مکان نقاطیست که تفاضل

فواصلشان از دو نقطه ثابت  $F$  و  $F'$  مساوی مقدار ثابت  $2a$  باشد .  
 سایر تعاریف مانند شماره ۱ ( فقط باید توجه کرد که  
 محور اقصی هندلولی در حقیقت وجود ندارد و برای شباهتی که  
 بین خواص بیضی و هندلولی هست خطی را که از وسط دو  
 کانون بطول  $a$  —  $\sqrt{c^2}$  —  $a$  بر محور شکل عمود شود محور اقصی  
 می نامند ) در هندلولی بجای محور اطول اغلب گفته میشود محور قاطع .  
 اگر  $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  باشد هندلولی را متساوی الاضلاع میگویند .

۴۴ — رسم هندلوی — ۱ ) با حرکت متصل : خط کشی  
 بطول  $a$  را حول سنجاقی که در يك کانون فرورفته باشد دوران  
 میدهدیم ، نخی بطول  $2a$  — اختیار میکنیم ، يك سر آن را  
 بانتهای خط کش کوپیده سر دیگرش را در کانون دیگر ثابت  
 نگاه میداریم . نوك مدادی که همواره نخ را بر خط کش  
 متکی نگاهدارد قسمتی از هندلوی رسم میکند . ۲ ) با نقاط  
 یابی : مانند بیضی با رسم قوسهایی بشعاعهایی  $a$  و  $a - b$  .

۴۵ — قضیه — فواصل فواصل هر نقطه درون هندلوی از  
 دو کانون بزرگتر و از آن نقاط بیرون هندلوی کوچکتر است  
 از  $2a$  . و بعکس .

۴۶ — قضیه — هندلوی مکان هندسی نقاطیست که از يك  
 کانون و دایرة هادی کانون دیگر فاصله باشند ( مکان

مراکز دوا یر یست که بر یک کانون بگذرند و بر دایره کانون هادی دیگر مماس باشند) .

۴۷- فصل مشترک خط و هذلولی همانند فصل مشترک خط و بیضی

مماس بر هذلولی

۴۸- قضیه - مماس بر هذلولی زاویه بین دو شعاع حامل را نصف میکند .

نتیجه ۹- رجوع شود بشماره ۷ ( نتیجه ۱ و ۲ )

نتیجه ۴- قائم بر هر نقطه از هذلولی زاویه بین یک شعاع حامل و امتداد شعاع دیگر را نصف میکند

نتیجه ۳- رجوع شود به شماره ۸ ( نتیجه )

۴۹- قضیه - تصویر هر کانون بر روی مماس واقعست بر دایره اصلی .

۵۰- رسم مماس - مانند شماره ۱۰ - فقط باید توجه کرد که رسم مماس موازی امتداد معین فقط وقتی جواب دارد که عمودیکه از یک کانون بر آن امتداد فرود میآید دایره هادی کانون دیگر را قطع کند ( یعنی عمود بر امتداد مقروش در داخل زاویه بین دو مماسی باشد که از یک کانون بر دایره هادی کانون دیگر رسم میشوند ) .

۵۱- قضیه - هر قسمله - مانند بیضی ( شماره ۱۲ )

۵۲- قضیه - عین خواص مندرج در شماره ۱۵

### مجاانبهای هندلوی

۳۳ — **تهریف** — (رجوع شود بشماره ۱۸۸ قسمت جبر)  
— و نیز میتوان گفت مجانب هندلوی مماسی است که نقطه تماس آن  
بینهایت دور باشد.

۳۴ — **قضیه** — هندلوی دو مجانب دارد که بر مرکز آن  
میگذرند.

**نتیجه ۱** — مجانبها نسبت به دو محور قرینه یکدیگرند  
**نتیجه ۲** — دو مجانب هندلوی عمودهایی هستند که از  $O$  بر  
مماسهایی که از  $F$  و  $F'$  بر دایره اصلی رسم میشوند فرود آیند.

۳۵ — **قضیه** — ممابنها دو قطر مستطیلی هستند که مرکز  
 $O$  و اضلاعش با دو محور موازی و پرتیب مساوی  $2a$  و  $2b$  باشند.

**نتیجه ۱** — دو مجانب هندلوی متساوی المحورین بر هم  
عمودند.

**نتیجه ۲** — فاصله هر کانون از هر مجانب مساوی  $b$  است.

### شعاعهای حامل — معادله هندلوی

۳۶ — **قضیه** — شعاعهای حامل هر نقطه هندلوی مساوی  
هستند با :

$$a + \frac{cx}{a} \quad \text{و} \quad a - \frac{cx}{a}$$

»  $x$  فاصله  $O$  از عمودیست که از نقطه مفروض بر محور قاطع  
فرود آید (

۳۷ — قضیه — اگر نقطه (د) مرکز و محورهای هندلوی  
محورهای مختصات باشند معادله هندلوی :

$$1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad \text{میباشد}$$

نتیجه — معادله هندلوی متساوی‌المحورین :

$$a^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} \quad \text{است}$$

نتیجه ۲ — اگر مختصات هندلوی متساوی‌المحورین  
محورهای مختصات فرض شوند معادله آن :

$$\frac{a^2}{2} = \frac{x^2}{2} \quad \text{یا} \quad \frac{a^2}{2} = \frac{y^2}{2} \quad \text{میباشد.}$$

### III سهمی (شالجمی)

۳۸ — تعریف — سهمی مکان هندسی نقاطیست که از  
يك نقطه، بنام کانون، و يك خط، بنام هادی، بیک فاصله باشند.  
خطی که از کانون بگذرد و بر هادی عمود باشد محور، فاصله  
کانون از هادی پارامتر و خطوطی که یکی يك نقطه M را  
بکانون I وصل کند و دیگری از N بر هادی عمود باشد  
شعاعهای حامل نام دارند. محل تلاقی محور با سهمی، رأس  
آنست. تصویر قسمتی از مماس واقع بین نقطه تماس و امتداد  
محور بر محور را تحت ظل و تصویر قسمت مشابه از قائم را  
تحت قائم گویند.

۳۹ — رسم سهمی — (۱) با مرکب دایره خط کشی در  
مقابل هادی میگذاریم. يك سر تخی بطول يك ضلع گونیایر

یگانئون و سر دیگر آنرا بنقطه تلاقی آن ضلع با وتر گونیا تا بت نموده ضلع دیگر گونیا را متکی بخط کش میلفرانیم، نوک مهادی که نخ را همیشه بضلع گونیا متکی نگاهدارد قسمتی از سهمی را رسم میکنند. ۲) ترسیم با نقطه یابی - از کانون بنقطه غیر مشخص  $N$  از هادی وصل میکنیم، عمود منصف  $IN$  عمودیرا که از  $N$  بر هادی اخراج شود در  $NT$  قطع میکنند،  $NI$  واقعت بر روی سهمی. راه دیگر:  $I'$  کانون و  $I$  محل تلاقی محور و هادی فرض میشوند، خط  $\Delta$  را موازی هادی رسم میکنیم تا محور را در  $I'D$  تلاقی کند. بر مرکز  $I'$  و شعاعی مساوی  $I'D$  قوسی میزنیم تا  $\Delta$  را در  $M$  و  $NT$  قطع کند، این دو نقطه بر روی سهمی هستند.

۴۰ - قضیه - هر نقطه درون سهمی یگانئون نزدیکتر است تا بهادی و هر نقطه بیرون آن بهادی نزدیکتر است تا یگانئون. و بعکس.

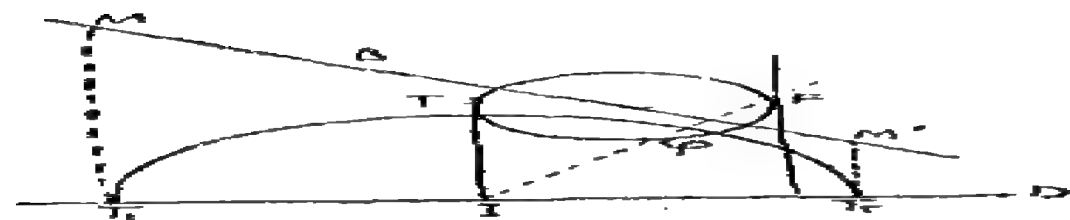
۴۱ - قضیه - خطی که از  $I'$  بر هادی عمود شود محور تقارن سهمی است (بهمین جهت محور نامیده میشود).

۴۲ - قضیه - سهمی حد يك بیضی است که يك رأس و يك کانون آن ثابت بمانند ولی کانون دیگر در روی محور طول بی نهایت دور شود.

توضیح - از قضیه فوق میتوان استفاده کرد و بسیاری از خواص سهمی را با استفاده از خواص مشابه در بیضی ثابت نمود.



۴۳ — فصل مشترك خط و سهمی — برای بدست آوردن فصل مشترك خط  $\triangle$  با يك سهمی  $\Delta^k$  كانون و هادی آن  $F$  و  $(D)$  هستند (ش ۵)  $\varphi$  قرینه  $T$  را نسبت به  $\triangle$



( ش ۵ )

یافته دایره‌ای رسم میکنیم که بر  $T$  و  $\varphi$  بگذرد و بر  $(D)$  مماس شود و مرکز این دایره فصل مشترك سهمی با  $\triangle$  است. بر حسب آنکه  $\varphi$  و  $F$  يك طرف  $(D)$  واقع شوند یا  $\varphi$  بر  $(D)$  قرار گیرد خط سهمی را دو جا قطع میکند یا بر آن مماس است. اگر  $\varphi$  آن طرف  $(D)$  واقع شود خط منحنی را قطع نمی نماید. مماس بر سهمی

۴۴ — قضیه — مماس بر سهمی منصف زاویه بین دو شعاع حامل است. نتیجه ۱ — قرینه كانون نسبت بهر مماس بر خط هادی واقع است.

نتیجه ۲ — اگر از  $T$  خطی بر شعاع حامل نقطه تماس عمود کنیم، این خط بر محل تلاقی مماس با هادی میگذرد. نتیجه ۳ — قائم بر سهمی منصف زاویه بین يك شعاع حامل و امتداد دیگر است.

۴۵ — قضیه — مماس بر راس مکان انصافیر كانون بر مماسهای بر سهمی است.



بر کانون می‌گذرد (۲) قطعه‌ای از یک مماس متحرک محصور بین نقطه تماس و خط هادی از کانون بر او به قائمه دیده می‌شود.

۴۹- قضیه- خطی که از محل تقاطع دو مماس موازی محصور رسم شود بر وسط خط واصل بین تقاطع مماس می‌گذرد.

۵۰- قضیه- (پو قسمله ۱) مماس‌هایی که از یک نقطه  $M$  بر سهمی شوند با خطی که این نقطه را بکانون ربط می‌دهد و با عمودیکه از  $M$  بر هادی فرود می‌آید گوشه‌های مساوی می‌سازند (۲)  $FM$  منصف گوشه بین شعاع‌های حامل دو نقطه تماس است.

۵۱- قضیه- قسمتی از مماس متحرک که بین دو مماس ثابت محصور باشد از کانون بگوشه ثابتی دیده می‌شود.

نتیجه- اگر سه مماس بر سهمی یکدیگر را در  $N$  و  $N'$  و  $P$  قطع کنند دایره  $MNP$  بر کانون سهمی می‌گذرد.

شعاع حامل، معادله، مساحت سهمی.

۵۲- قضیه- هرگاه راس سهمی را مرکز مختصات، محور  $X$  را محور طولها و مماس بر راس را محور عرض‌ها فرض کنیم:

(۱) شعاع حامل هر نقطه  $x$  طول  $x$  مساویست با  $\frac{1}{p} - x$

(۲) معادله سهمی عبارتست از  $y^2 = 2px$

۵۳- قضیه- سطح قسمتی از سهمی محصور بین منحنی

و عمودی که بر محور رسم شود  $\frac{1}{2}$  سطح مستطیلی است که



فواصلشان از کانون و هادی ثابتی، ثابت و بزرگتر از ۱ میباشد.

۳) سهمی مکان هندسی نقاطیست که نسبت  $C$  و  $a$ ، فواصلشان از کانون و هادی ثابتی مساوی ۱ میباشد.

( $\frac{C}{a}$  - خروج از مرکز منحنی است. در بیضی و هذلولی بازاء هر کانون يك هادی وجود دارد که وابسته بآن کانون است) پس بیضی و هذلولی و سهمی مکان هندسی نقاطی هستند که نسبت فواصلشان از نقطه ثابتی و خط ثابتی مقداری است ثابت.

۵۷ — قضیه — منصف یکی از زاویه های حادث بین دو خط که کانون  $F$  را بدو نقطه  $M$  و  $M'$  از يك بیضی، هذلولی یا سهمی وصل میکنند بر محل تلاقی  $M$  و  $M'$  یا هادی  $\triangle$  میگذرد.

نتیجه ۱ — قطعه ای از مماس بر بیضی، هذلولی یا سهمی محصور بین هادی و نقطه تماس از کانون یزاویه قائمه دیده میشود.

نتیجه ۲ — اگر از يك نقطه  $P$  واقع بر هادی دو مماس  $PT$  و  $PT'$  بر بیضی، هذلولی یا سهمی رسم کنیم وتر  $TT'$  بر کانون میگذرد و  $PF$  عمود است بر  $TT'$ .

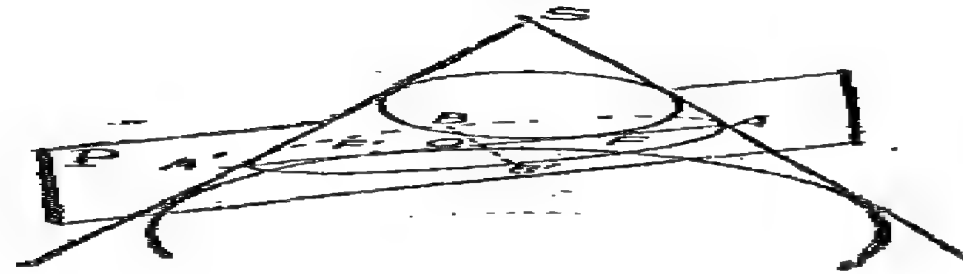
۵۸ — رسم مماسی — برای اینکه از نقطه  $T$  واقع بر یکی از منحنیهای سه گانه مماسی بر آن رسم کنیم کافیست از  $T$  به  $F$  وصل نماییم و عمودی بر  $FT$  بکشیم تا هادی را در  $P$

قطع کند.  $PT$  مماس معطالو بست.

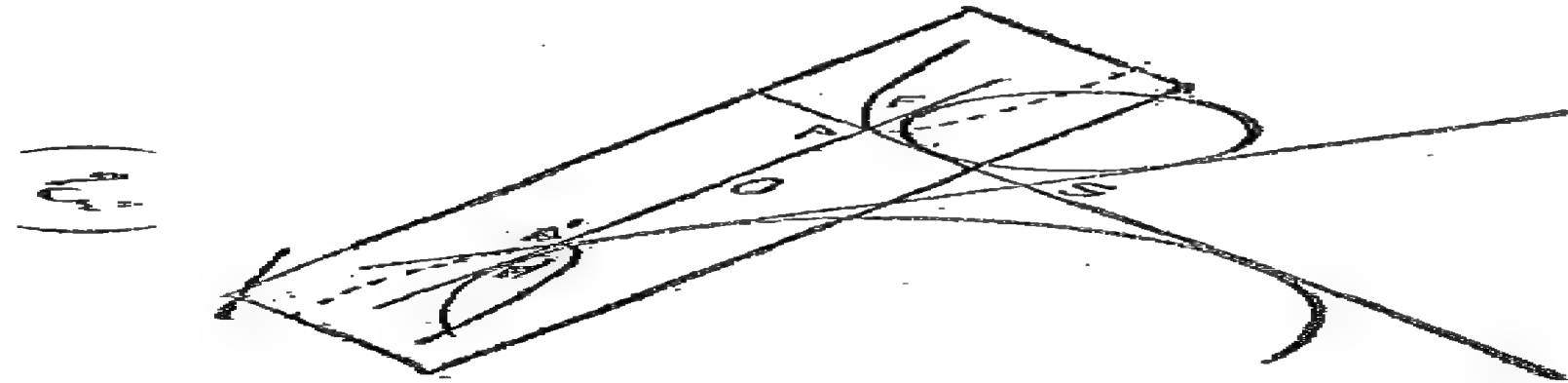
## ۲- مقاطع مخروطی

۵۹- قضیه داندلن- هر گاه صفحه‌ای مخروط مستدیری

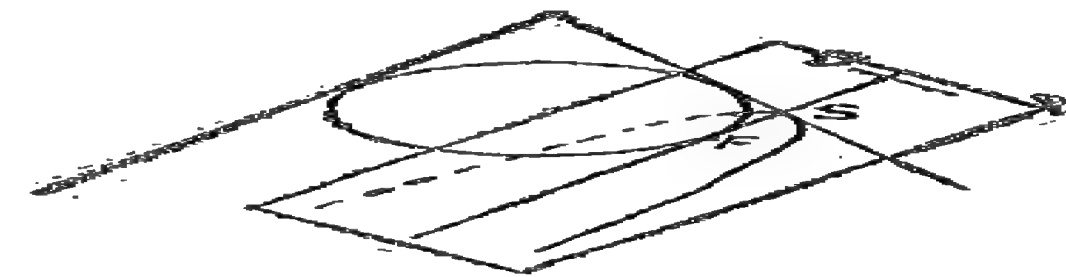
را قطع کند: ۱) اگر همه مولدهای آنرا در يك طرف رأس تلاقی کند مقطع يك بیضی است (ش ۸) ۲) اگر امتداد بعضی از مولدها را قطع نماید (دو دامنه مخروط را قطع کند) مقطع هذلولی است (ش ۹) ۳) اگر صفحه موازی يك مولد باشد مقطع سهمی است (ش ۱۰)



(ش ۸)



(ش ۹)



«ش ۱۰»

۶۰- قیصر ۱۵- اگر صفحه قاطع عمود بر محور مخروط

مستدیر باشد مقطع دایره است.

۶۱- قیصر ۵۲- بمشاسبت اینکه بیضی و هذلولی و سهمی

مقاطع صفحه در مخروط هستند آنها را مقاطع یا قطعات مخروطی یا بطور خلاصه مخروطات گویند. بیضی را قطع ناقص، هنداولی را قطع زائد و سهمی را قطع منکافی نیز مینامند.

۶۲ — فیکسوره — اگر رأس مخروط بر پشته‌ایست دور شود جسم تبدیل باستوانه مستدیر میگردد. پس مقطع صفحه مستوی در استوانه مستدیر نیز بیضی است، مگر وقتی که صفحه با مولد موازی باشد که در این صورت مقطع دو خط مستقیم است (یعنی یک سهمی که پارامترش صفر و کانونش بی نهایت دور است).

### هندسه رقومی و هندسه ترسیمی

۱ — موضوع — موضوع هندسه‌های رقومی و ترسیمی نمایش اجسام است بوسیله تصاویر قائم آنها.

$M'$  تصویر نقطه  $M$  بر صفحه تصویر  $(P)$  موقع عمود است که از  $M$  بر  $(P)$  فرود آید. همیشه میتوان از  $M$  به  $M'$  پی برد اما  $M'$  پشته‌ای برای مشخص کردن  $M$  کافی نیست زیرا  $M'$  تصویر جمیع نقاطیست که بر روی عمودی که  $M'$  موقع آنست واقع باشند.

پس برای مشخص ساختن  $M$  باید علاوه بر  $M'$  عامل دیگری در دست باشد.

این عامل ممکنست رقوم  $M$  یعنی فاصله  $M$  از صفحه مقایسه باشد (موضوع هندسه رقومی) یا تصویر دیگری از

IV. بر صفحه دیگر ( موضوع هندسه ترسیمی )

پنایراین موضوع هندسه رقومی نمایش اجسام است  
بوسیله تصاویرشان بر یک صفحه و فاصله نقاط مختلفشان از  
این صفحه . موضوع هندسه ترسیمی نمایش اجسام است بوسیله  
تصاویرشان بر دو صفحه مشخص .

۱- اصول نقطه رقومی

۱- نقطه

۲- نقطه بوسیله تصویر و فاصله اش از صفحه افق ( صفحه  
مقایسه ) مشخص میشود . تصویر نقطه را با حرف لاتینی  
کوچک و رقوم آن را بشکل اندیس زیر آن نمایش میدهند مانند  
نقطه  $a_v$  ( ش ۱ ) رقومها در صفحه مقایسه صفر ، زیر آن منفی و  
بالای آن مثبت میباشند .



( ش ۱ )

تصویر نقطه و رقوم آن را  
ملخصه نقطه میگویند . ملخص هر  
شکل شکلی است که از ملخصهای  
نقاط مختلف آن پدید آمده باشد .  
۳- مقیاسی — چون اجسام را  
با یسار حقیقی نمیتوان نمایش داد ناچار  
ایجاد آنها را ده ، صد ، هزار ، ...  
مرتبه کوچک میکنند . مقیاسی نسبت تصویر را به جسم نمایش  
میدهد . مقیاسی عددی ، بایک عدد بیان میکنند که ابعاد چند  
مرتبه کوچک شده اند ؛ مثال :  $\frac{1}{2}$  ،  $\frac{1}{4}$  ،  $\frac{1}{8}$  ، ...



مقیاس خطی عبارت از خطی است که واحد طول را پس از کوچک کردن چند بار بر آن نقل کرده اند و جزء اول سمت چپ آنرا که پاشنه مقیاس میگویند با جزء کوچکتر تقسیم نموده اند (ش ۲)



شکل ۲ مقیاس خطی

۱. . . . . را نمایش میدهد

که در آن هر سانتیمتر معرف

۵۰۰ متر است. برای تعیین فاصله دو نقطه در روی نقشه با پرگار

فاصله آنها را بر روی مقیاس نقل نموده میخوانند.

II - خط مستقیم

۱ - تصاویر خط مستقیم خط مستقیم است و بوسیله دو



(ش ۳)

نقطه مشخص میشود مساوند خط  
 $a \text{ و } b$  (ش ۳) اثر خط فصل مشترک  
 خط است با تصویرش. شیب خط خل  
 میل خط و اساس یا فراز خط خل  
 تمام آن زاویه است :

$$\text{شیب} = \frac{BB'}{AB'} = \frac{MM'}{AM'} = \frac{1}{am}$$

$$\text{اساس} = \text{Cotg } \alpha = \frac{BA}{BB'} = \frac{AM'}{MM'} = am$$

پس اساس خط فاصله تصاویر دو نقطه از خط است  
 که اختلاف رقومشان ۱ باشد و شیب عکس اساس میباشد.

خطی را که نقاط صحیح الرقوم بغاصله اساس بر آن معین شده باشد مدراج گویند .

۵ — خط افقی همه جا دارای يك رقوم است . تصویر خط قائم يك نقطه است .

۶ — تسطیح صفحه قائم بر افق یعنی صفحه قائم را حول يك خط افقی بنام لولا با اندازه ۹۰



(ش ۴)

درجه دوران تا موازی صفحه افق شود . اگر رقوم لولا صفر باشد صفحه قائم بعد از دوران بر صفحه افق منطبق میشود (ش ۵) هر نقطه مانند A از صفحه قائم بوضع A' در میآید و A' مساوی رقوم نقطه و عمود بر لولا است .



(ش ۵)

پس برای تسطیح خطی کافیست از دو نقطه آن (ش ۵) دو عمود بر تصویر خط اخراج کنیم و مساوی رقوم آن نقاط بر عمود ها جدا نمائیم و نقاطی را که بدست میآیند بهم وصل کنیم .

۷ — عکس عمل تسطیح را ترفیع مینامند .

۸ — ترفیع و ترمیم اساس خط — فاصله تصاویر دو نقطه که اختلاف رقومشان ۱ باشد اساس خط است (ش ۶) . برای بدست آوردن شیب عکس اساس را میسازیم .



(ش ۶)

۹ — ترفیع رقوم نقطه ای از

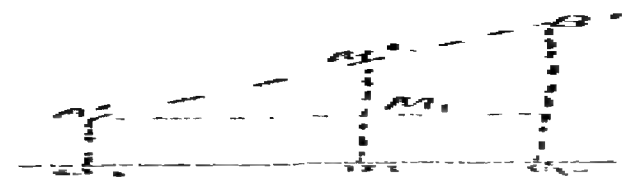
خط — يك مك تسطیح : تسطیح نقطه را بر تسطیح خط بدست میآوریم

و  $M'm$  را که مساوی رقوم  $T$  است  
اندازه میگیریم .

(۷) یا محاسبه :

$$\frac{M'M'}{BB'} = \frac{A'M'}{A'B'} = \frac{am}{ab}$$

یا



(ش ۷)

$$\frac{A}{B} = \frac{am}{ab} \quad \text{رقوم } A \text{ — رقوم } B$$

رقوم  $M$  را که مجهولست بدست میآورند (ش ۷)

عکس مسئله هم بدوراه مذکور قابل حل است .

۱۰ — تعیین زاویه خط با صفحه مقایسه — ۱) یکمك

تسطیع ۲) یکمك محاسبه با استفاده از شیب یا اساس

۱۱ — فاصله دو نقطه — ۱) یکمك تسطیع ۲) یکمك

محاسبه با استفاده از طول تصویر و اختلاف رقوم های  
دو نقطه .

### وضع دو خط

۱۲ — دو خط موازی — دارای تصاویر موازی، اساس —

های مساوی و ترقی رقوم در يك جهت هستند .

۱۳ — دو خط متقاطع — تصاویرشان متقاطهند و نقطه تقاطع

در روی هر دو تصویر يك رقوم دارد .

هر گاه تصاویر دو خط  $ab$  و  $cd$  یکدیگر را در خارج

حدود شکل قطع کنند دو خط  $ca$  و  $bd$  را رسم میکنیم ، اگر

این دو خط متوازی یا متقاطعه باشند دو خط  $ab$  و  $cd$  متقاطهند

و گرنه متناظرند .

رقوم نقطه تقاطع با محاسبه بدست می آید. بهتر اینست که چهار نقطه دو متحد الرقوم دو خط را بهم وصل کنیم، اگر دو خط واصل موازی شوند دو خط مفروض متقاطع خواهند بود.

— III —

۱۴ - صفحه با سه نقطه یا دو خط متوازی یا امتقاطع  
مشخص میشود .

١٥ - صفحه افقی همه جا يك رقوم دارد. تصویر صفحه قائم يك خط است ( اثر صفحه ) .

۱۶ - افقیه‌های صفحه مقاطع آتند با صفحات موازی یا افق . پس همه با یکدیگر موازیند . برای رسم يك افقیه کافیست دو نقطه متحدالرقوم از صفحه را بهم وصل کنیم .

۱۷ - خط، از رگترین شیب صفحه آن است که با تصویرش بزرگترین زاویه‌ای را بسازد که خطوط صفحه با تصاویرشان میسازند -

خط بزرگترین شیب صفحه عمودست بر  
افقیه ها . پس تصویر آن هم  
عمودست .

خط بزرگترین شیب پشته‌ای برای نمایش دادن صفحه کافیت (زیر امتداد افقیه ها را بدست می‌دهد) - پس برای نمایش صفحه خط بزرگترین شیب آنرا که مدورج شده باشد بدو خط موازی نمایش می‌دهیم (ش ۸) - این خط را مقیاس شیب صفحه می‌گویند.

(14)

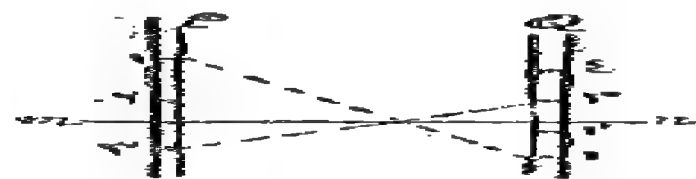
- ۱۸ - توازی خط و صفحه - خط وقتی با صفحه موازیست که بایکی از خطهای آن متوازی باشد .
- ۱۹ - توازی دو صفحه - دو صفحه وقتی متوازییند که دو خط متقاطع یکی با دو خط از دیگری موازی باشند . برای موازی بودن دو صفحه کفایت مقیاس شیبهای آنها متوازی باشند .
- ۲۰ - تقاطع صفحات - برای پیدا کردن فصل مشترک



دو صفحه چهار افقیه دو بدو هم رقوم آن ها را امتداد میدهم تا همدیگرا در نقطه  $m$  و  $n$  قطع کنند  $mn$  فصل مشترک دو صفحه است (ش ۹)

هرگاه تصاویر مقیاس شیب های دو صفحه موازی باشند چهار نقطه دو بدو متحد الرقوم آنها را بهم وصل میکنیم تا یکدیگر را در تلاقی کنند .

افقیه ای که بر  $a$  بگذرد فصل مشترک مطلوب است (ش ۱۰)



(ش ۱۰)

۲۱ - تقاطع خط و صفحه - برای بدست آوردن فصل خط مشترک  $ab$  و صفحه  $P$  (ش ۱۱) ، بر خط  $ab$  صفحه اختیاری مرور میدهم و بکدام افقیه های ۱ و ۲ آن فصل مشترکش را با صفحه  $P$  بدست میآوریم . این فصل مشترک خط  $ab$  را در  $m$  قطع میکند .



(ش ۱۱)

$m$  محل تلاقی  $ab$  با صفحه  $P$  است .

۲۲ - خط عمود بر صفحه -

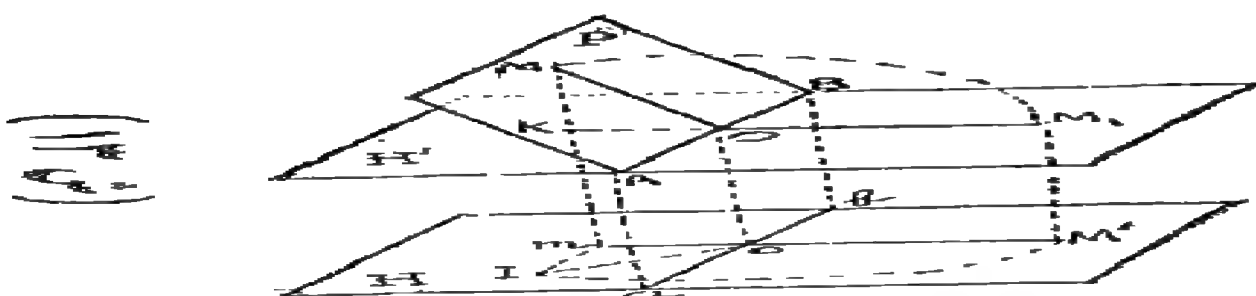
قضیه - اگر خطی بر صفحه ای عمود باشد تصویرش موازی مقیاس شیب صفحه ، شیبش عکس شیب آن و ترقی رقومش در جهت عکس ترقی رقوم آن میباشد . مانند خط  $ab$  و صفحه  $P$  (ش ۱۲)



(ش ۱۲)

IV = تسطیح

۲۳ - تسطیح يك شكل مستوی عبارت از آنست که صفحه شکل را حول يك خط افقی خود ، بنام لولا ، بتقدر دوران دهیم تا موازی صفحه افق شود .

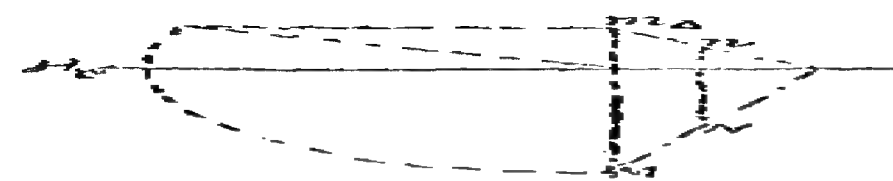


(ش ۱۳)

اگر صفحه  $P$  حول افقیه رقوم  $E$   $AB$  دوران کند وضع يك نقطه  $M$  از آنرا در نظر میگیریم . تصویر  $M$  است و بعد از دوران وضع  $M'$  درمیآید (ش ۱۳) که تصویر آن ( یا باصطلاح تسطیح  $M'$  ) نقطه  $M'$  است .

وترسه بر قاعده  $OMP' = OM' = OM = OMK'$  بعلاوه  $OM'$  موازی  $OM$  و عمودست بر  $ab$  پس تسطیح نقطه بر روی عمود است که از تصویر نقطه بر لولا فرود آید و فاصله آن از لولا مساوی وترسه بر قاعده است که يك ضلعش  $(KO)$  مساوی فاصله تصویر نقطه از لولا و ضلع دیگرش  $(KM)$  مساوی اختلاف ارتفاع نقطه و لولا باشد .

پس تسطیح نقطه  $m$  در حول لولای  $ab$  نقطه  $M'$  است (ش ۱۴)



(ش ۱۴)

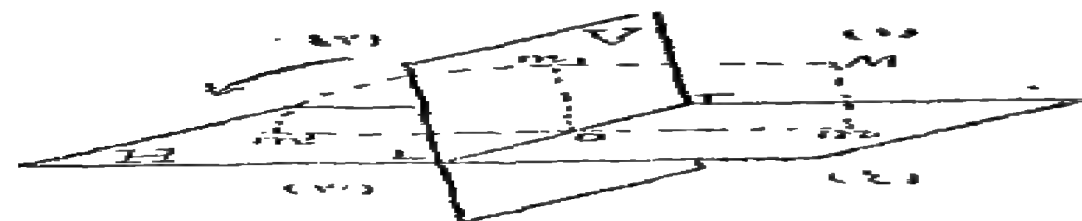
این قاعده را قاعده سه به سه قائم  
گویند. چون  $m$  و  $n$  تسطیحات در دست  
باشند هر نقطه دیگر مانند  $n$  (ش ۱۴)  
را یکمات آن تسطیح میکنیم.

۲۴ — ترفیع عکس عمل تسطیح

است.

۲۵ — برای اینکه در روی شکلی ابعاد و زوایا بمقدار  
حقیقی معلوم شوند باید آنرا تسطیح کرد.  
۲۶ — صفحه را عموماً حول یکی از افقیه های آن  
تسطیح میکنند.

#### ۴ - اصول هندسه ترسیمی

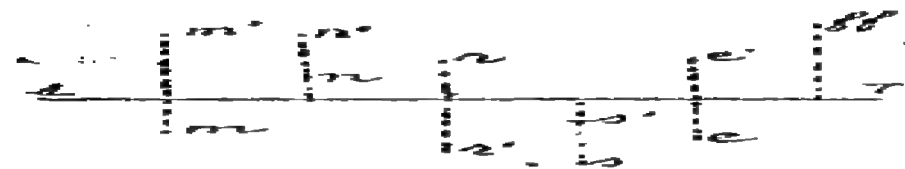


(ش ۱۵)

۲۷ — صفحات تصویر عبارتند  
از صفحه افقی (H) و صفحه قائم (V) عمود  
بر آن. I.T. فصل مشترک در صفحه را خط  
الارض میگویند. فاصله نقطه  $m$  از  
صفحه افق ارتفاع و از صفحه قائم  
بعد نام دارد.

بالای صفحه افق ارتفاعات مثبت و زیر آن منفی و جلو  
صفحه قائم بعدها مثبت و عقب آن منفی میباشند همیشه وقتی  
بالای صفحه افق و روی صفحه قائم بایستیم در روی فصل  
مشترک دو صفحه (خط الارض)  $I$  را طرف چپ و  $T$  را طرف  
راست میخوانیم (ش ۱۵) و اگر این ترتیب عوض شود جهت مثبت  
بعد ها و ارتفاعها تغییر میکنند. پس از اینکه نقطه  $M$  را بر

HI و V تصویر کردیم V را در جهت مثلثاتی  $90^\circ$  درجه دوران می‌دهیم تا بر افق منطبق شود و تصویر قائم نقطه بوضع  $m'$  در آید. حال چون IT را روی صفحه کاغذ بکشیم بالای آن جای



(ش ۱۶)

ارتفاعهای مثبت و بعدهای منفی و زیر آن جای بعدهای مثبت و ارتفاعهای منفی است.

تصاویر قائم و افقی هر نقطه بر روی يك رابط (خط عمود بر IT) واقعند.

تصویر افقی را با حرف كوچك لاتینی و تصویر قائم را با همان حرف با علامت (') نمایش می‌دهند (ش ۱۶).

## ۹ = نقطه

۲۸ — صفحات تصویر فضا را بچهار ناحیه تقسیم میکنند و ناحیه اول بعد و ارتفاع مثبت نقطه ( $mn'$ ، ش ۱۶)، در دوم بعد منفی و ارتفاع مثبت (نقطه  $nn'$ )، در سوم بعد و ارتفاع منفی (نقطه  $rr'$ ) و در چهارم بعد مثبت و ارتفاع منفی است (نقطه  $ss'$ ).

نقاط واقع در صفحه منصف فرجه نواحی اول و سوم دارای بعد و ارتفاع مساوی و متعادل علامه‌اند یعنی تصاویرشان نسبت به IT قرینه یکدیگرند؟ ( $ee'$ )، تصاویر نقاط واقع در صفحه منصف فرجه نواحی دوم و چهارم بر یکدیگر منطبقند، زیرا بعد و ارتفاعشان مساوی و مختلف علامه می‌باشند  $ff'$ .



## ۷ - خط مستقیم

۲۹ - خط مستقیم بوسیله تصاویر قائم و افقی که یک



حرف بزرگ لاتینی خوانده میشوند  
تمایش داده میشود. مانند خط  $AA'$   
(ش ۱۷)

۳۰ - خطوط مهم عبارتند از :

خط افقی موازی صفحه افق ، تصویر قائمش موازی  
خط الارض است .

خط جبهی موازی صفحه قائم ، تصویر افقی موازی  
خط الارض است .

خط قائم عمود بر صفحه افق ، تصویر افقی یک نقطه  
و تصویر قائمش عمود است بر خط الارض .

خط منتهی به عمود بر صفحه قائم ، تصویر قائمش یک نقطه  
و تصویر افقی عمود است بر خط الارض .

خط نیمرخ عمود بر خط الارض ، تصاویرش بر امتداد  
یکدیگر عمود بر خط الارضند .

خط مواجه موازی خط الارض ، تصاویرش هم موازی  
خط الارضند .

هر خط بوسیله تصاویرش مشخص میشود مگر نیمرخ  
که باید اقلاً دو نقطه آن مشخص باشد .

برای حل مسائل مربوط به خط نیمرخ باید آنرا تسطیح  
کرد ( رجوع شود به شماره ۶ )

۳۱ - نقاط مهم خط عبارتند از :

اثر افقی که برای بدست آوردنش تصویر قائم خط را امتداد میدهم تا خط الارض را قطع کند .  
اثر قائم از برخورد تصویر افقی با خط الارض مشخص میشود .

نقطه تلاقی خط و منصف فرجه اول از تلاقی قرینه یکی از تصاویر خط با تصویر دیگر مشخص میشود .  
نقطه تلاقی با منصف فرجه دوم از تلاقی تصاویر خط مشخص میشود .

۳۲ — توازی دو خط — تصاویر همنامشان متوازیند .  
۳۳ — تقاطع دو خط — تصاویر همنامشان متقاطعتند و دو نقطه تقاطع بر یک رابط واقعند .  
برای تحقیق اینکه دو خط که تصاویرشان در خارج حدود شکل متقاطعتند یکدیگر را قطع میکنند یا نه دو نقطه یکی را بدو نقطه دیگری وصل میکنیم ، اگر دو خط که باین طریق بدست میآیند متقاطع یا متوازی باشند دو خط متروخ هم متقاطعتند .  
۳۴ — توازی دو نیمرخ نیز بنحویفوق تحقیق میشود .

۴ — صفحه

۳۵ — صفحه مانند هندسه ، با دو خط متقاطع یا متوازی یا سه نقطه غیر واقع بر یک استقامت یا یک خط و نقطه مشخص میشود .

۳۶ — خطوط مهم صفحه عبارتند از :  
اثر افقی ، که تصویر قائمش بر روی خط الارض است .  
اثر قائم ، « افقیش » «  
این دوائر یا با هم موازیند یا یکدیگر را در روی

قطعه می‌کشند .

نمایش صفحه بوسیله آثار بهترین طریق نمایش آنست .  
**افقیه ها** که تصاویر افقیشان موازی اثر افقی است .  
**جبهیه ها** « قائمشان » « قائم است .  
 خط **بزرگترین شیب نسبت به صفحه افقی** که تصویر  
 افقیش عمودست بر اثر افقی .  
 خط **بزرگترین شیب نسبت به صفحه قائم** که تصویر  
 قائمش عمودست بر اثر قائم .

۳۷ — صفحات مهم عبارتند از :

**صفحه افقی** ، اثر افقی ندارد ، اثر قائمش موازی  
 خط الارض است .  
**صفحه جبهی** ، اثر قائم ندارد ، اثر افقیش موازی  
 خط الارض است .  
**صفحه قائم** ، اثر قائمش عمود بر خط الارض ( تصاویر  
 افقی جمیع خطوط و نقاطش بر اثر افقی آن واقع میشوند )  
**صفحه مشتعب** ، اثر افقیش عمود بر خط الارض ( تصاویر  
 قائم جمیع خطوط و نقاطش بر اثر قائم آن واقع میشوند )  
**صفحه نیمرخ** ، آثارش بزرگ امتداد و عمودند بر  
 خط الارض  
**صفحه مواجه** ، موازی خط الارض و آثارش هم با آن  
 موازی هستند  
 مسائل مربوط به صفحه نیمرخ بوسیله تسطیح صفحه حل  
 میشوند .

۳۸ — توازی خط و صفحه — خط وقتی با صفحه موازی است که یا یکی از خطوط آن موازی باشد.

۳۹ — خط عمود بر صفحه — تصویری افقیش عمود است بر اثر افقی و تصویر قائمش بر اثر قائم صفحه.

۴۰ — فصل مشترک دو صفحه — فصل مشترک دو صفحه را بوسیله رسم دو صفحه کمکی بدست میآورند بدین طریق که با هر صفحه کمکی يك نقطه از فصل مشترک را تعیین میکنند، صفحات کمکی بیشتر عبارتند از صفحات تصویری، صفحات قائم یا منتصب و افقی یا جبهی.

مثلاً: فصل مشترک دو صفحه که با آثارشان نموده شده باشند (ش ۱۸) يك مك صفحات تصویری - فصل مشترک دو صفحه که هر يك بدو خط متقاطع نموده شده باشند (ش ۱۹)

يك مك دو صفحه افقی - فصل مشترک دو صفحه مواج (ش ۲۰) كمك يك صفحه قائم - فصل مشترک

خط و صفحه بر خط يك صفحه فرعی مرور میدهدیم (معمولاً قائم یا منتصب)، فصل مشترک دو صفحه خط مفروض را در نقطه  $\bigcirc\bigcirc$  قطع میکنند (ش ۲۱)، این نقطه فصل مشترک خط و صفحه است.

ش ۱۸ (ش ۱۹) (ش ۲۰) (ش ۲۱)

ش ۲۲ (ش ۲۳) (ش ۲۴) (ش ۲۵)

ش ۲۶ (ش ۲۷) (ش ۲۸) (ش ۲۹)

ش ۳۰ (ش ۳۱) (ش ۳۲) (ش ۳۳)

ش ۳۴ (ش ۳۵) (ش ۳۶) (ش ۳۷)

ش ۳۸ (ش ۳۹) (ش ۴۰) (ش ۴۱)

ش ۴۲ (ش ۴۳) (ش ۴۴) (ش ۴۵)

ش ۴۶ (ش ۴۷) (ش ۴۸) (ش ۴۹)

## ع - تغییر مکانها

ع ۲ - مقصود از تغییر مکان دادن يك

شكل مستوی اینست كه آنرا با يك

صفحه تصویر (یا يك صفحه تصویر

موازی آن) قرار دهیم تا تصویر جدید

شكل با خود آن مساوی شود و بتوانیم

از روی آن خواص و ابعاد و زوایای

شكل را مطالعه کنیم . تغییر مکانها بر سه قسمند : تغییر صفحه،

دوران ، تسطیح .

## ۱ - تغییر صفحه

ع ۳ - در تغییر صفحه صفحه افقی یا قائم تصویر را موازی

صفحه شكل قرار میدهیم و صفحه دیگر ثابت میماند . هر تغییر صفحه

یوشیله وضع جدید خط الارض مشخص میشود .

۱ - تغییر صفحه افقی - در این تغییر چون صفحه قائم تغییر

نمیکند تصاویر قائم نقاط و بعدهای آنها ثابت میمانند و فقط تصاویر

افقی و ارتفاعات تغییر میکنند . پس برای بدست آوردن تصاویر

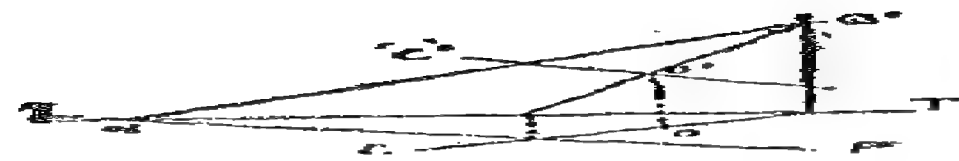
افقی جدید باید از تصاویر قائم (كه ثابتند)

عمودهای بر خط الارض جدید كشید و پس

آنها ابعاد را (كه ثابتند) جدا نمود (ش ۲۲) .

ب - تغییر صفحه قائم - در این تغییر

صفحه تصاویر افقی و ارتفاعات ثابت میمانند

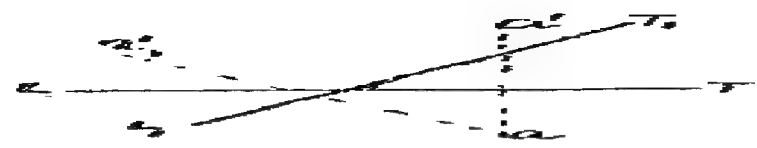


(ش ۲۱)



ش ۲۲

و تصاویر قائم و ارتفاعات تغییر میکنند (ش ۲۳)



(ش ۲۳)

پ — تغییر صفحه مضاعف — یعنی  
اول یکی از صفحات تصویر و بعد صفحه  
دیگر را تغییر داد. این عمل تر کیب دو  
عمل سابق است. مثلاً دو شکل ۲۴ نخست  
صفحه افق و بعد صفحه قائم را تغییر  
میدهم.



(ش ۲۴)

توجه کنید! — در مومع تغییر  
صفحه بسایند متوجه علامت

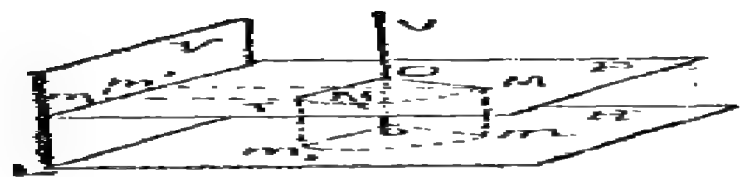
بعدها و ارتفاعات و وضع خط الارض جدید بود یعنی اگر طرف  
چپ خط الارض قرار داده شود بعد های مثبت زیر و ارتفاعات  
مثبت بالای آن واقع میشوند، و اگر را طرف راست  
بگذاریم عکس این ترتیب خواهد شد.

- ۴۴ - صفحه افق ( یا قائم ) را موازی خطی باید  
قرار داد - خط افقی ( یا جبهی ) میشود، پس خط الارض جدید باید  
موازی تصویر قائم ( یا افقی ) خط مفروض قرار داده شود.
- ۴۵ - صفحه افق ( یا قائم ) را عمود بر صفحه ای باید  
قرار داد - صفحه قائم ( یا منتصب ) میشود، پس خط الارض  
جدید باید عمود بر اثر قائم ( یا افقی ) صفحه اختیار شود.
- ۴۶ - خطی را عمود بر صفحه افقی ( یا قائم ) باید  
قرار داد - نخست باید خط را موازی صفحه قائم ( یا افق ) کرد  
بعد آنرا عمود بر صفحه افق ( یا قائم ) نمود ( تغییر صفحه مضاعف )

۴۷ - صفحه‌ای را عمود بر صفحه افق (یا قائم) باید قرار داد به نحوی که باید صفحه را عمود بر صفحه قائم (یا افق) کرد بعد موازی صفحه افق (یا قائم) نمود (تغییر صفحه مضاعف).

پس در دوران

۴۸ - دوران نقطه - هر گاه نقطه‌ای حول محوری عمود بر یک صفحه (مثلاً افق) یا اندازه زاویه دوران کند تصویر آن بر آن صفحه در صفحه بهمان اندازه دوران میکنند و تصویرش بر صفحه دیگر (قائم) در روی خطی موازی خط الارض تغییر مکان میدهد (ش ۲۵).

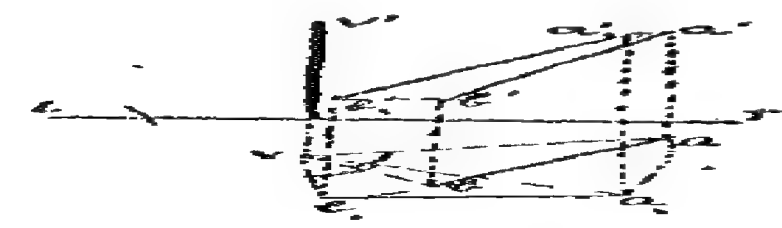


پس در دوران نقطه حول محور قائم تصویر افقی بمقدار حقیقی دوران میکند و تصویر قائم در روی خطی موازی  $TT'$  حرکت مینماید (ش ۲۶) و در



دوران حول محور ممتد به تصویر قائم بمقدار حقیقی دوران نموده تصویر افقی موازی خط الارض تغییر مکان میدهد.

۴۹ - دوران خط - البته برای دوران خط کافیست دو نقطه آنرا دوران داد (ش ۲۷).

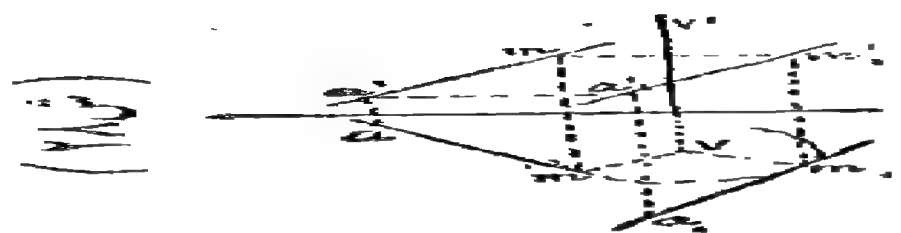


با  $ab$  مساویست.

و دیگری اینست که عمود مشترک محور و خط را رسم کنیم و موقع آن آنرا با اندازه زاویه مطلوب دوران

(ش ۲۸)

دهیم و وضع جدید خط را بوسیله رسم عمود بر وضع جدید عمود مشترک مشخص کنیم. آنگاه تصویر قائم را بوسیله تعیین اوضاع جدید تصاویر نقطه دیگر معین نماییم (ش ۲۸)



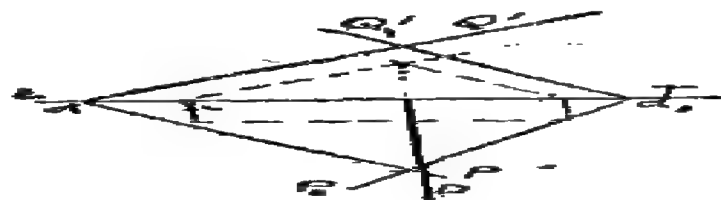
(ش ۲۸)

۵۰ - دوران صفحه - باید يك نقطه و يك خط از صفحه را دوران داد. ولی معمولاً نقطه تلاقی محور یا صفحه را که حین دوران ثابت میماند در نظر گرفته يك خط از صفحه را ( معمولاً اثر قائم را اگر محور قائم باشد و اثر قائم را اگر محور منتصب

باشد) باندازه زاویه مطلوب دوران میدهیم. اگر یکی از آثار را دوران دهیم برای تعیین اثر جدید دیگر از امتداد جهیه یا افقیه ای که بر محل تلاقی محور و صفحه میگذرد استفاده میکنیم (ش ۲۹ و ۳۰)



(ش ۲۹)

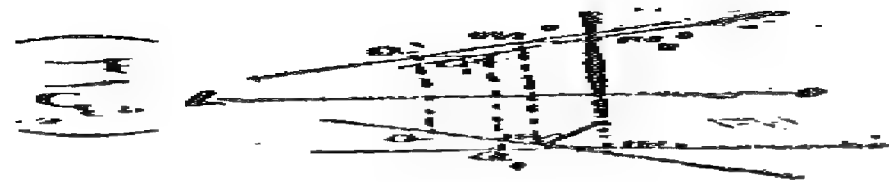


(ش ۳۰)

۵۱ - خطی را دوران دهید تا جهیه شود باید تصویر افقی خط موازی خط الارض گردد. پس

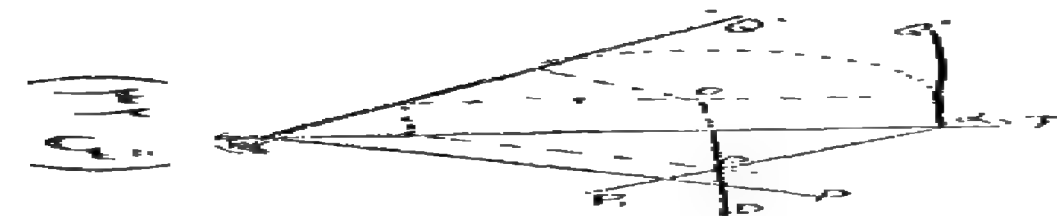


باید خط را حول محور قائم دوران داد تا وقتی تصویر افقیش موازی LT شود (ش ۳۱) ۵۲ - صفحه‌ای را دوران دهید تا قائم شود



(ش ۳۱)

باید اثر قائم بر خط الارض عمود گردد . پس باید صفحه طول محور منتصب T نقدر دوران کند که اثر قائمش بر LT عمود شود . (۳۲) ۵۳ - توجه کنید !



(ش ۳۲)

برای اینکه خطی موازی یا صفحه‌ای عمود بر یک صفحه تصویر شود یک دوران یا یک تغییر صفحه لازم است و برای اینکه خطی عمود یا صفحه‌ای موازی یک صفحه تصویر شود باید دوران یا دو تغییر صفحه داد یعنی اول خط را

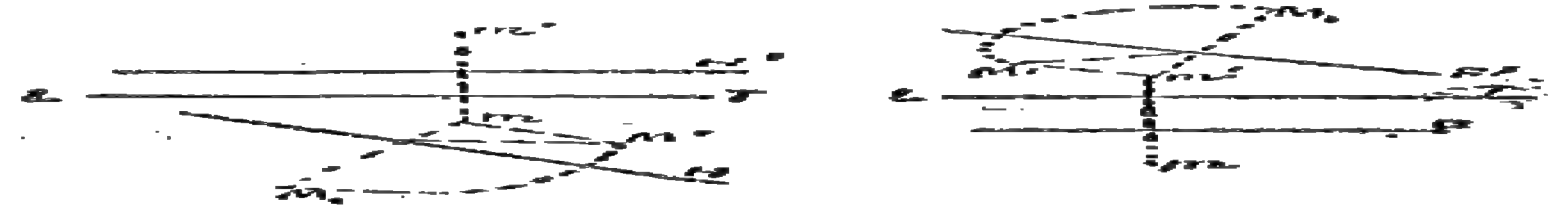
موازی یک صفحه تصویر و بعد عمود بر صفحه دیگر نمود یا اول صفحه را عمود بر یک صفحه تصویر و بعد موازی با صفحه دیگر کرد .

پ - قسمطیطیح

۵۴ - تسطیح یعنی موازی قرار دادن یک شکل مستوی یا صفحه افق یا صفحه قائم .

برای این کار باید صفحه شکل را حول یک خط افقی یا جبهی بنام لول اول یا نقدر دوران داد تا موازی صفحه افق یا قائم شود . تسطیح هر نقطه بر روی عمود نیست که از تصویر آن بر لولا فرود آید و فاصله اش از لولا و ترسه بر قائم نیست که یا که ضلع آن فاصله تصویر آن نقطه از لولا و ضلع دیگرش اختلاف

ارتفاع (یا بعد) نقطه را لولا باشد (رجوع شود بشماره ۲۳) پس برای تسطیج يك نقطه حول يك افقیه (جبهیه) از تصویر افقی (قائم) نقطه خطی موازی لولا رسم و بر روی آن با اندازه اختلاف ارتفاع (بعد) نقطه و لولا جدا میکنیم و نیز از تصویر نقطه عمودی بر لولا فرود میآوریم و بر امتداد آن طول مساوی و تر سه بر قائمیکه بر روی دو خط مرسوم ساخته شده باشد جدا میکنیم (ش ۳۳) (قاعدۀ سه بر قائم). نقاط دیگر را بكمك آن نقطه تسطیج میکنیم.



(ش ۳۳)

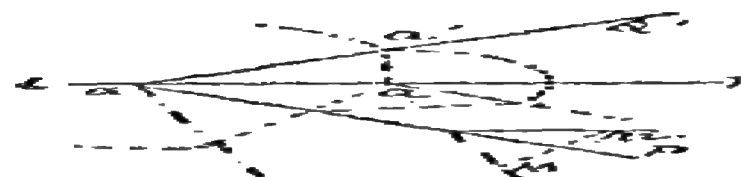
باید متوجه بود که نقاطی را میتوان بكمك تسطیج نقطه A حول يك افقیه یا جبهیه تسطیج کرد که با آن نقطه و لولا در يك صفحه باشند.

- ۵۵ - قرقیج عكس عمل تسطیج است.
- ۵۶ - تسطیج خط - کافیست دو نقطه آن را تسطیج کرد و بكمك آنها خط را تسطیج نمود.
- هر خط موازی لولا باشد تسطیجش هم یا لولا موازیست.
- تسطیجات خطوط متوازی متوازیند.
- ۵۷ - تسطیج صفحه - معمولاً صفحه را حول اثر افقی یا

قائم آن تسطیح میکنند و برای اینکار تسطیح اثر قائم را حول اثر افقی (ش ۳۴) یا تسطیح اثر افقی را حول اثر قائم (ش ۳۵) بدست آورده سایر نقاط مانند  $mm'$  را بمقد آن تسطیح مینماییم.



(ش ۳۵)



(ش ۳۴)

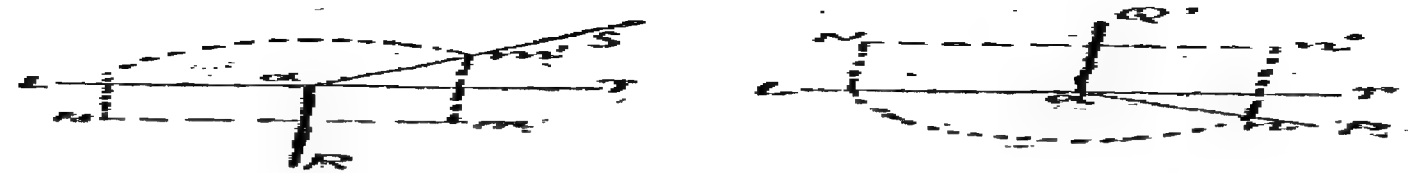
برای تسطیح اثر قائم حول اثر افقی يك نقطه، مانند  $aa'$  را اختیار نموده از  $a$  عمودی بر اثر فرود میآوریم و بر کز  $\alpha$  و شعاع  $\alpha a$  قوسی میزنیم تا عمود را در  $A$  قطع کند.  $A$  تسطیح اثر قائم است.

۵۸ - قرار دادن تسطیح خط را همیشه با خط نقطه

نمایش میدهند.

۵۹ - تسطیح صفحه قائم یا منتصب - برای تسطیح

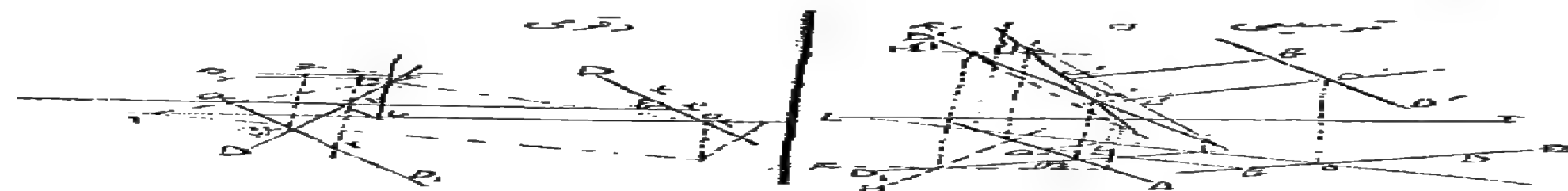
$mm'$  از صفحه قائم (یا  $mm'$  از صفحه منتصب) (ش ۳۶) اثر  $m$  یا  $n$  عمودی بر لول فرود میآوریم و بر کز  $\alpha$  و شعاع  $\alpha m$  یا  $\alpha n$  قوسی میزنیم تا خط الارض را در  $K$  قطع کند از  $K$  عمودی بر  $XX'$  اخراج مینماییم تا عمودی را که بر لولا وارد آمده است در  $M$  یا  $N$  قطع کند.  $M$  یا  $N$  نقطه مفروض است.



( ش ۳۶ )

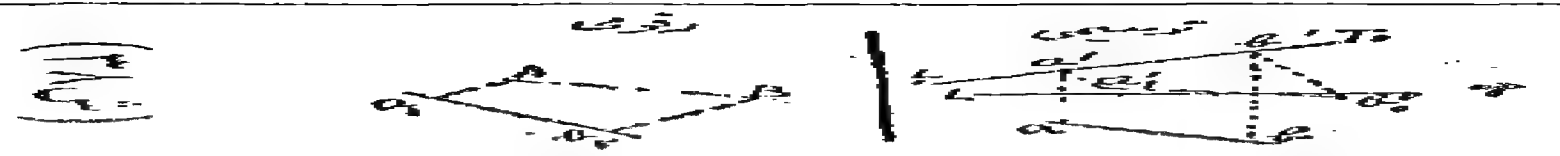
## ۴ - موارد استعمال

۶۰ - عمود مشترک دو خط - برای رسم عمود مشترک دو خط  $\Delta$  و  $\Delta'$  بر صفحه‌ای موازی  $\Delta'$  می‌گذرانیم و از یک نقطه  $M$  از  $\Delta'$  عمودی بر آن صفحه فرود می‌آوریم تا  $T$  را در  $\Delta$  قطع کند، از  $A$  خطی موازی  $\Delta'$  می‌کشیم تا  $B$  را در  $\Delta$  قطع نماید خط  $BC$  که موازی  $MA$  رسم شود جواب مسئله است.



( ش ۳۷ )

۶۱ - فاصله دو نقطه  $A$  و  $B$  - در ترسیمی یکمات تغییر صفحه یا دوران و در رقومی بوسیله تسطیح خط و اصل بین دو نقطه معلوم میشود (ش ۳۸)



۶۲ - فاصله نقطه  $A$  از صفحه  $IP$  - عمود  $AO$  را که موقع آن در صفحه  $O$  است بر  $IP$  وارد آورده فاصله نقاط  $A$  و  $P$  را معین میکنیم (ش ۳۸)



(ش ۳۹)

۶۳ - فاصله نقطه از خط - صفحه‌ای بر خط عمود کرده  $O$  نقطه برخورد را بدست می‌آوریم و فاصله  $NT$  از  $O$  را اندازه میگیریم.

۶۴ - زاویه دو خط - بوسیله تسطیح دو خط موازی صفحه تصویر قرار داده میشوند (ش ۴۰)



(ش ۴۱)

۶۵- زاویه خط و صفحه - یعنی زاویه خط با تصویرش بر صفحه .

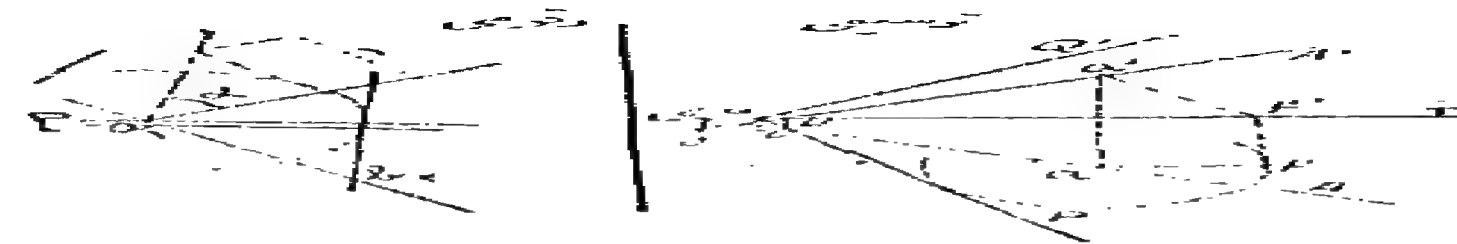
۶۶- زاویه دو صفحه - صفحه‌ای بر فصل مشترك آنها عمود نموده فصل مشترك آنرا با هریك از آن دو پیدا می‌كنیم (ش ۴۱)، زاویه بین دو فصل مشترك زاویه بین دو صفحه است



(ش ۴۱)

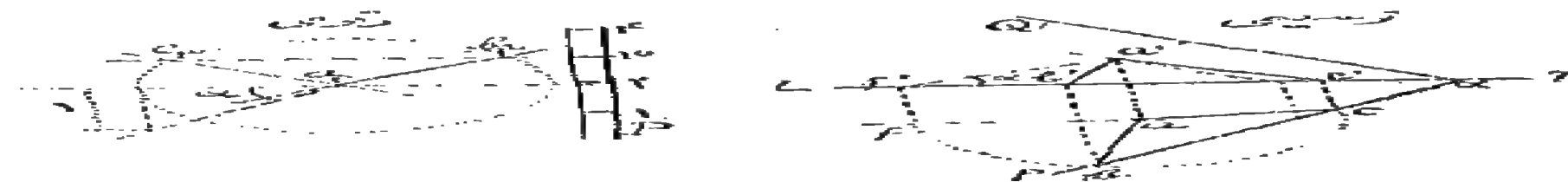
۶۷- بر خطی صفحه‌ای بگذرانید كه با صفحه افق زاویه  $\alpha$  تشكيل دهد .

هندسه رقومی : بر كز  $\alpha$  و شعاع برابر  $\cot \alpha$  دایره‌ای می‌زنیم و از  $b\alpha$  مماسی بر آن دایره رسم می‌كنیم، شعاعی از دایره كه بر این مماس عمود شود مماس شیب صفحه مطلوب است (ش ۴۲) هندسه ترسیمی :  $b'b'$  اثر افقی خط  $\triangle \triangle'$  را تعیین می‌كنیم از يك نقطه  $a'a'$  چپیه‌ای كه با صفحه افق زاویه  $\alpha$  بسازد رسم نموده  $c'c'$  اثر افقی آنرا بدست می‌آوریم ، بر كز  $c'$  و شعاع  $a'c'$  دایره‌ای ترسیم نموده از  $a'$  مماسی بر آنست رسم می‌كنیم این مماس اثر افقی صفحه مطلوب است (ش ۴۲) اثر قائم آن بر اثر قائم خط  $\triangle \triangle'$  نیز می‌گذرد .



(ش ۴۲)

۶۸ — در صفحه‌ای از یک نقطه خطی رسم کنیم که با صفحه افق زاویه  $\alpha$  بسازد . هندسه رفومی — بر کوزه شعاع  $\alpha$   $p = \cotg \alpha$  دایره‌ای میزنیم تا افقیه رقوم ۲ صفحه را در  $a$  و  $c$  قطع کند،  $ab$  و  $ac$  دو جواب مسئله‌اند (ش ۴۳)



(ش ۴۳)

هندسه ترسیمی : از  $a$  و  $a'$  چپیه ای رسم می‌کنیم که با افق زاویه  $\alpha$  بسازد ،  $aa'$  را افقی آترابندست می‌آوریم بر کوزه شعاع  $\alpha$  دایره‌ای میزنیم تا  $a$  و  $a'$  را در  $c$  و  $c'$  قطع کند در  $ab$  و  $a'b'$  جوابهای مسئله‌اند (ش ۴۳)

۶۹ - زاویه صفحه با صفحات تصویر - هندسه رقومی: برای تعیین زاویه صفحه  $P$  با صفحه افق کافیت زاویه تسطیح مقیاس شیب صفحه را با تصویر آن دست آورد (ش ۴۴).

هندسه قوسیمی: برای اینکه زاویه صفحه  $P$  را با صفحه افق (قائم) تعیین کنیم بوسیله تغییر صفحه قائم (افقی) آن را بصفحه منتصب (قائم) تبدیل میکنیم و زاویه اثر قائم (افقی) را با خط الارش اندازه میگیریم (ش ۴۵، ۱ و ۲).



ش ۴۵



۱



ش ۴۷

۷۰ - زاویه خط با صفحات تصویر

هندسه رقومی: زاویه خط و تسطیح آن.

هندسه قوسیمی - برای آنکه زاویه خط  $DD'$  را با صفحه افق (قائم) تعیین نماییم آن را بوسیله تغییر صفحه قائم (افقی) تبدیل بصفحه چپه (افقی) میکنیم و زاویه تصویر قائم (افقی) را با خط الارش اندازه میگیریم.

۷۱ - نمایش چند روها - برای آنکه چند روی را بوسیله تصاویرش نمایش دهند تصاویر رؤس و اضلاع را

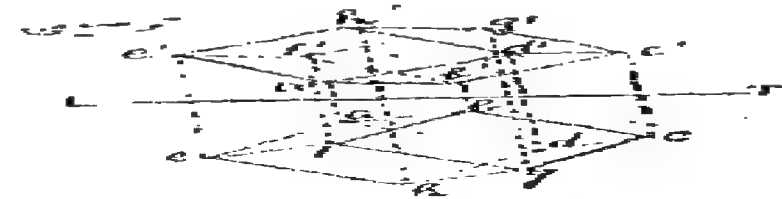
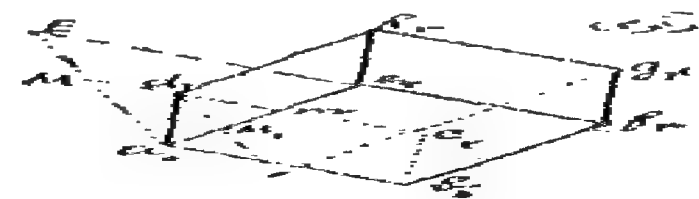


رسم میکنند. تصاویر تمام رؤس و اضلاع در داخل خط شکسته مسدودی واقعند که دوره ظاهری نامیده میشود.

**خطوط واقع در درون دوره ظاهری و رئی و بعضی مخفی میباشد \***

برای تشخیص خطوط رئی از مخفی فرض میکنیم چشم بغاصله بی نهایت دور از صفحه تصویر واقع باشد در نتیجه خطی که از محل تقاطع ظاهری دو خط واقع در درون دوره ظاهری به جسم وصل شود بر صفحه تصویر عمود میشود. این خط دو یال جسم را که تصاویرشان متقاطعند قطع میکند، هر يك از دو یال که نقطه تقاطع آن از صفحه تصویر دور تر باشد رئی و دیگری مخفی است. پس از دو یال متناظر که تصاویرشان متقاطع باشند در تصویر افقی آنکه ارتفاع نقطه تقاطع (و در تصویر قائم این که بعد نقطه تقاطع) بر آن بیشتر است رئی است. هر یال که بیک نقطه غیر رئی و هر صفحه که بیک یال غیر رئی محدود گردد غیر رئی میباشد.

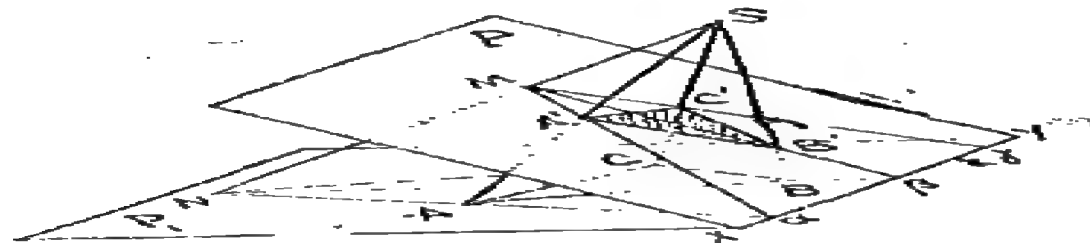
**مثال :**



(ش ۶-۴)

ارتفاع  $m$  روی  $Cd$  کمتر است تا روی  $ae$  ، پس  $ae$  و در نتیجه  $fe$  و  $ch$  مرئی هستند .

۷۲ - مقطع اجسام - مقطع هر صفحه در يك چند رو چند بری است که رؤسش فصل مشترك بالهای چند رو یا صفحه و اضلاعش فصل مشترك روهای جسم یا صفحه اند . پس برای بدست آوردن مقطع بدو طریق میتوان عمل کرد : (۱) تعیین رؤس (۲) تعیین اضلاع .



(ش ۴۷)

ب - تعیین رؤس - اگر بخواهیم فصل مشترك صفحه  $P$  (ش ۴۷) را با هرم  $SABC$  پیدا کنیم  $xy$  فصل مشترك  $P$  با قاعده جسم را بدست میآوریم بعد خطی بر  $S$  میگذرانیم تا  $P$  و صفحه قاعده را در  $M$  و  $N$  قطع کند از  $N$  به رؤس قاعده وصل نموده امتداد میدهیم تا  $xy$  را در  $\alpha$  و  $\beta$  قطع نمایند از  $\alpha$  و  $\beta$  به  $N$  وصل میمائیم تا بالهای منتهی بر رؤس وابسته را تلاقی نمایند این نقاط رؤس مقطعند .

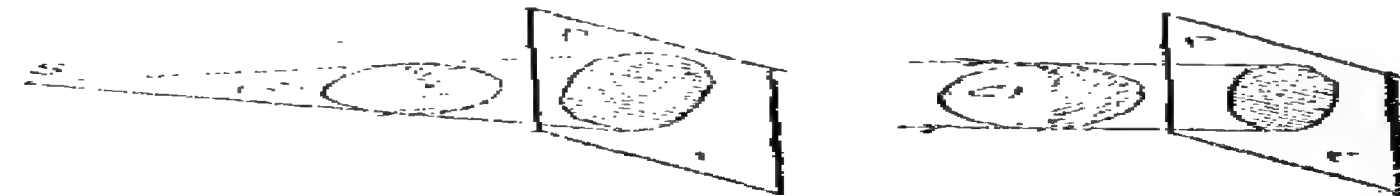
ب - تعیین اضلاع - در این طریقه باید فصل مشترك یکایک روهای جسم را یا صفحه قاطع بدست آوریم؛ قسمتی از فصل مشتركها که در خارج و جوه جسم واقع شوند جزء مقطع نیستند .

۷۳ - فصل مشترك خط با چند رو - برای بدست آوردن فصل مشترك خط  $\Delta$  با يك جسم، که نقاط ورود و خروج

خط در جسم نامیده میشوند ، بر  $\triangle$  صفحه اختیاری گذرانیده  
مقطع آنرا یا جسم بدست میآوریم ، نقاط برخورد  $\triangle$  با محیط  
مقطع نقاط مطلوبند .

اگر جسم دارای رأس باشد ، مانند هرم ، صفحه فرعی  
را عموماً بر رأس جسم میگذارند و هرگاه جسم یالهای موازی  
داشته باشد ، مانند منشور ، صفحه فرعی را معمولاً بموازات آن  
یال مرور میدهند و در هر حال نقاط مشترک صفحه فرعی را یا  
محیط قاعده جسم بدست آورده از نقاط تقاطع بر رأس ( در  
(حالت اول) وصل میکنند ، یا خطوطی موازی یال ( در حالت  
دوم) میکشند تا  $\triangle$  را قطع کنند ، نقاط تقاطع محل تلاقی خط  
با جسم میباشد .

۷۴ — سایه ها — اگر جسمی در مقابل يك نقطه نورانی  
(ش ۴۸، ۱) یا در سر راه يك دسته شعاعهای نورانی (ش ۴۸، ۲) قرار  
گیرد قسمتی از خود جسم تاریك است (سایه خاص) و  
قسمتی از هر صفحه كه در مقابل جسم باشد نیز در سایه است  
(سایه منتقل)



ش ۴۸

اشعه ای كه بچشم میتابند در صورت اول مخروط و در

صورت دوم استوانه‌ای تشکیل می‌دهند که مخروط یا استوانه‌سایه نام دارند .

در حالت اول سایه را مشعاعی و در حالت دوم آفت را شمسی می‌نامند .

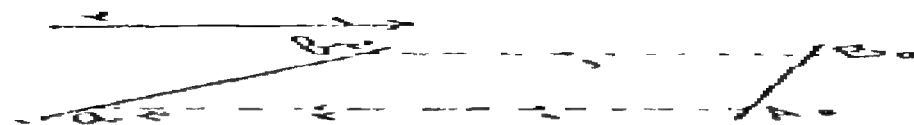
دوره ظاهری سایه منتقل بسایه خطی است که مخروط یا استوانه‌سایه در امتداد آن بر جسم معاس گردیده است . سایه‌سایر رؤس و یالهای جسم در داخل دوره ظاهری واقع میشوند . از دو یال متناظر که سایه های آن‌ها در درون دوره ظاهری سایه متقاطع میشوند یکی روشن و دیگری تاریک است . برای تشخیص آن که روشن است فصل مشترک شعاع نورانی منتهی بنقطه تقاطع سایه‌ها را با یالها بدست می‌آوریم یالی که نقطه تقاطعش بمنبع نور نزدیکتر باشد روشن است .

اگر سایه منتقل یالی در داخل دوره ظاهری واقع شود بر حسب آنکه یال روشن یا تاریک باشد دو روی منتهی بآن روشن یا تاریک خواهند بود .

در صورتیکه سایه رأسی درون دوره ظاهری افتد بر حسب آنکه رأس روشن یا تاریک باشد یالهای منتهی بآن روشن یا تاریک خواهند بود .

مثالی - سایه منتقل را بر موازات امتداد تیر بر صفحه تصویر معین کنید .

## رقومی

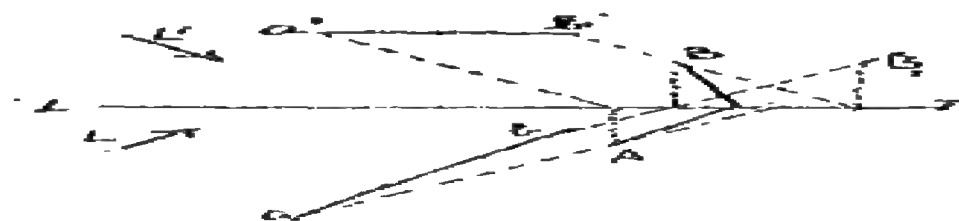


ش ۴۹

## تریسیمی

ممکن است قسمتی از سایه یک یال، مانند  $aa'$ ، بر صفحه افق و قسمتی بر صفحه قائم افتد. برای تشخیص آن باید خطریف عمل می‌کنیم:

فرض می‌کنیم  $A$  سایه  $aa'$  بر صفحه افق و  $B$  سایه  $a'$  بر صفحه قائم واقع شود و  $B$  سایه  $a$  را بر خط الارض و  $B$  خط الارض را در نقطه  $a$  قطع می‌کند،  $Aa$  قسمتی از سایه یال  $BA$  واقع بر صفحه افق و  $Ba$  قسمتی از آن واقع بر صفحه قائم است (ش ۵۰)



ش ۵۰

## مکانیک

### ۱. -- بردارها -- عزم

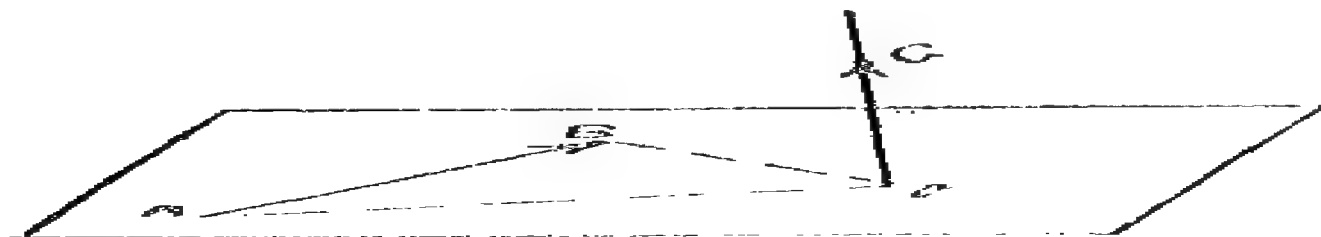
۱ -- بردارها -- صفحه ۱۹۳ شماره‌های ۱۳۶ تا ۱۴۴ مراجعه شود.

۲ -- جهت دوران - اگر شخصی در امتداد مجوری بطریقی قرار گیرد که سرش بطرف مثبت محور متوجه باشد برای او جهت مثبت دوران جهت حرکت از چپ بر راست است این جهت را مستقیم و مخالف آنرا معکوس گویند .  
دو بردار متعامد نسبت بهم مستقیمند موقعی که اگر شخصی در امتداد یکی از آنها قرار گیرد بطوری که سرش بطرف انتهای بردار متوجه باشد و بردار دیگر را نگاه کند جهت بردار دوم نسبت باو از چپ بر راست باشد . در غیر این حال دو بردار نسبت بیکدیگر معکوسند .

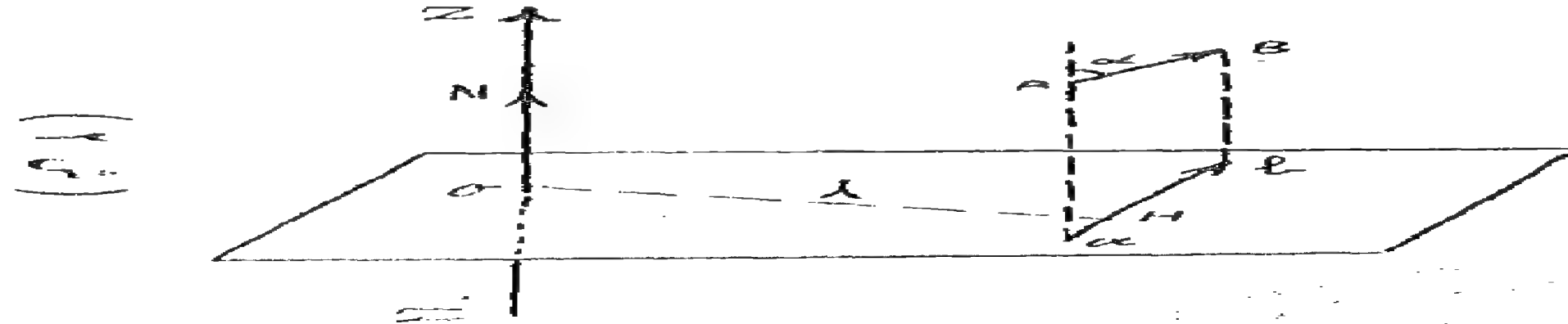
۳ -- عزم مرکز - عزم بردار  $AB$  نسبت بنقطه  $O$   $M_O(AB) = (O)(AB)$

بردار دیگری است مانند  $(O)$  (ش ۱) که :

(ش ۱)



- (۱) مبدأ آن نقطه  $O$  می باشد .  
 (۲) محمولش عمودی است که از نقطه  $O$  بر صفحه  $OAB$  اخراج شود .  
 (۳) جهتش نسبت به بردار  $AB$  مستقیم است .  
 (۴) طولش بحسب عدد دو برابر مساحت مثلث  $OAB$  است .  
 ۴- عزمهای دو بردار متقابل نسبت به یک نقطه دو بردار متقابلند .  
 ۵- عزم یک بردار تغییر نمی کند اگر: (۱) بردار بر محمولش حرکت نکند (۲) مبدأ آن ثابت بوده انتهایش بر خطی موازی  $OA$  تغییر مکان دهد .  
 ۶- اگر مرکز عزم بر بردار منطبق یا طول بردار صفر باشد عزم آن صفر است .  
 ۷- عزم محوری - عزم بردار  $(AB)$  نسبت به محور  $ZZ'$  عبارتست از عزم تصویر قائم  $(AB)$  بر صفحه ای که بر  $ZZ'$  عمود باشد نسبت به نقطه تقاطع  $ZZ'$  با  $T$  صفحه (ش ۷) و اینطور نوشته میشود:



(۷)

مثلاً اگر بردار  $AB$  در صفحه  $OAB$  موازی با  $ZZ'$  باشد عزم آن صفر است و اگر بردار  $AB$  عمود بر  $ZZ'$  باشد عزم آن برابر  $AB \cdot h$  می باشد.

$$M_{zz} \cdot (AB) = M_0(ab) = ON$$

حال اگر  $\alpha$  و  $\lambda$  به ترتیب زاویه بردار  $AB$  و محور و طول عمود مشترک بردار  $AB$  و محور  $z/z'$  باشند :

$$ON = AB \cdot \lambda \cdot \sin \alpha$$

- ۸ - عزم محوری يك بردار تغییر نمی‌کند هرگاه : (۱) بردار برمحصل خود حرکت نکند (۲) سطح تصویر تغییر نماید .
- ۹ - عزم محوری يك بردار صفر است وقتی : (۱) طول بردار صفر باشد (۲) بردار و محور در يك صفحه باشند .
- ۱۰ - قضیه - تصویر قائم عزم مرکزی يك بردار بر محور است .
- ۱۱ - قضیه وارین (Varignon) - عزم برآیند یکدسته بردار متقارب مساوی برآیند عزمهای بردارهای فروض است .

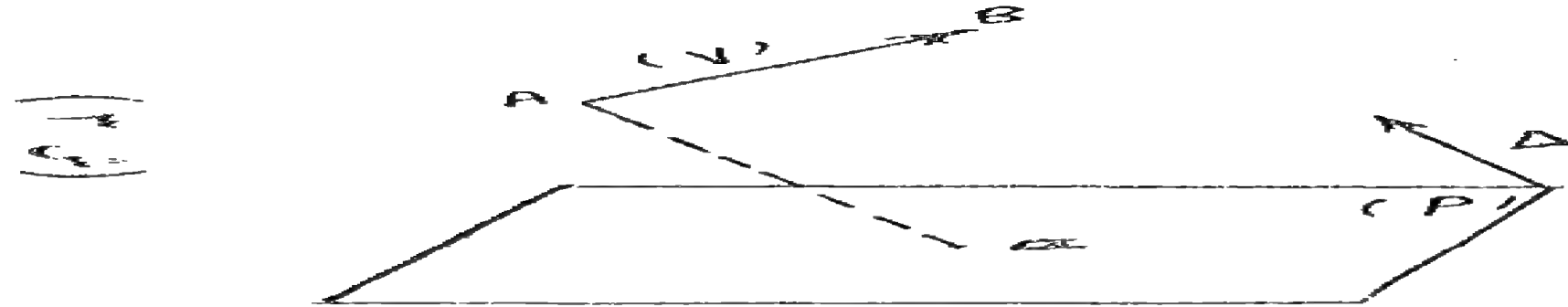
۱۲ - تعریف - برآیند عزمهای دو بردار زوج نسبت به يك نقطه را محور زوج مفروض گویند .

۱۳ - قضیه - محور يك زوج برداری است ثابت .

۱۴ - عزم بردار نسبت به صفحه هرگاه صفحه  $I$  و امتداد  $\triangle$  داده شده باشند عزم هر بردار  $(V)$  نسبت به صفحه  $I$  عبارتست از حاصلضرب مقدار جبری بردار  $(V)$  در مقدار جبری فاصله نقطه برآیند از صفحه وقتی که فاصله اخیر به موازات امتداد  $\triangle$  اندازه گرفته شده باشد (ش ۳)



$$M_P(V) = (V) \cdot \Delta a$$



اندازه چبری فواصل نقاط اثر در بالای صفحه مثبت و در زیر آن منفی هستند .  
اگر بردار در حول نقطه اثر خود دوران کند در عزم آن نسبت به صفحه P تغییری حاصل نمی شود ، اما اگر بر سر محل خود حرکت نماید عزم آن تغییر می کند .

### علم الحركات (Cinematique)

#### ۱ - تعاریف

۱ - سکون و حرکت — وقتی فاصله نقطه M از نقاط مختلف جسم صلب  $\Delta$  تغییر نکند M نسبت به آن جسم ساکن است والا متحرک است .

۲ - موضوع علم الحركات بحث در حرکت است بدون توجه به علل پیدایش آن .

۳ - معادله زمانی متحرک به رابطه (۱)  $\Delta = \Delta_0 + \Delta t$  را

معادله زمانی متحرک گویند (۳) مسافت مطویه و (۱) زمان (حرکت است)

۴ — مسیر حرکت — راهی را که نقطه متحرک در فضا طی میکند مسیر متحرک نامند. بر حسب آنکه مسیر مستقیم یا منحنی باشد حرکت ، مستقیم الخط یا منحنی الخط است .

II — حرکت مستقیم الخط متساویه

۵ — تعریف — هرگاه متحرکی بر مسیر مستقیمی تغییر مکان دهد و در یک جهت مسافتی متناسب با زمان پیماید حرکتش مستقیم الخط متساویه است .

۶ — معادله حرکت — هرگاه (۳) مسافت مطویه ، (۱) زمان ، (۲) مسافت اولیه (فاصله از مبدأ حرکت در لحظه  $t=0$ ) و سرعت حرکت باشد :

$$s = s_0 + vt$$

۷ — بردار سرعت — محاسبش مسیر حرکت ، مبدأش نقطه متحرک ، جهتش بر حسب آنکه سرعت مثبت یا منفی باشد در جهت حرکت یا مخالف آنست . قدر مطلق آن مسافتی است که متحرک در واحد زمان پیماید .

۸ — قضیه — هر حرکت مستقیم الخطی که معادله اش از درجه اول باشد متساویه است .

III — حرکت مستقیم الخط متغیر

۹ — تعریف — وقتی متحرک بر مسیر مستقیمی در زمانهای

متساوی مسافت غیر مساوی طی کند حرکتش مستقیم الخط متغیر است .

۱۰ — معادله حرکت از درجه اول بر حسب  $t$  و عیار تست  
 $s = f(t)$

۱۱ — حامل سرعت — بر مسیر واقع است و مبدأش نقطه متحرك و جهتش اگر مثبت باشد در جهت مسیر و الا بر خلاف آنست. قدر مطلق آن مشتق  $s$  یعنی  $f'(t)$  می باشد.  $v = f'(t)$  می باشد.  
 ۱۲ — حامل شتاب بر مسیر واقع و قدر مطلقش مشتق ثانی  $s$  یعنی  $f''(t) = a$  می باشد ، جهتش در صورتیکه  $a$  یا  $v$  صعودی باشد در جهت مثبت مسیر و الا بر خلاف آن است .

۱۳ — حرکت را مسرعه گویند اگر سرعت از حیت قدر مطلق ترقی کند و الا مبطله نامند .

۱۴ — دیاگرام حرکت سه منحنی نمایش تغییرات  $s$  و  $v$  و  $a$  را که نسبت بدو محور  $Os$  و  $Ov$  رسم شوند دیاگرام حرکت نامند .

#### IV — حرکت متشابه التغییر

۱۵ — تعریف — وقتی سرعت تابع درجه اولی نسبت به زمان باشد حرکت مستقیم الخط متشابه التغییر است .

۱ — معادله حرکت

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v = v_0 + a t$$

$$a = \text{مقدار ثابت}$$

۲ — سرعت :

۳ — شتاب :

اگر  $\gamma = 0$  باشد حرکت مسرعه و اگر  $\gamma < 0$  باشد محیطی است.

۴- مقدار سرعت بر حسب مسافت:

$$v = \sqrt{2\gamma(s - s_0)} - v_0$$

VI - متی گشت نویسانی ساده

۱۶- — شعریف - اگر متحرک  $M$  بر محیط دایره‌ای بشعاع  $R$  حرکت متشابه داشته باشد تصویرش بر خطی که در صفحه همین دایره واقع باشد دارای حرکت نوسانی ساده خواهد بود.

۱- حرکت نوسانی ساده حرکت مستقیم الخطی است متناوب و بمعادله:

$$x = R \cos(\omega t + \alpha)$$

۲- دوره تناوب:  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ؛ توان:  $n = \frac{1}{T}$

۳- سرعت:  $v = R \sin(\omega t + \alpha)$

۴- شتاب:  $a = -R \omega^2 \cos(\omega t + \alpha)$

۵- پس از حذف  $t$  در روابط فوق:

$$v^2 = \omega^2 R^2 - x^2 \quad \gamma = \pm \omega \sqrt{R^2 - x^2}$$

VI - حرکت هتختی الخطی متشابه

۱۷- قضیه - تصاویر حاملهای سرعت و شتاب حرکت

متحرک  $M$  بر هر محور سرعت و شتاب حرکت تصویر متحرک  $NE$  است بر آن محور.

## ۱۸ — مشخصات حرکت

اگر  $s$  مسافت طی شده در روی منحنی  $t$ ، زمان  $x$ ،  $y$ ،  $z$ ، مختصات متحرك،  $v$  سرعت،  $v_x$ ،  $v_y$ ،  $v_z$ ، تصاویر سرعت بر محورها،  $\gamma$  شتاب،  $\gamma_x$ ،  $\gamma_y$ ،  $\gamma_z$  تصاویر شتاب بر محورها باشند:

۱ — معادله زمانی حرکت:

$$s = r(t) \quad v = r'(t) \quad \gamma = r''(t)$$

۲ — مختصات زمانی متحرك

$$\begin{aligned} x &= f(t) & y &= g(t) & z &= h(t) \\ v_x &= f'(t) & v_y &= g'(t) & v_z &= h'(t) \end{aligned}$$

$$v = \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2 + h'(t)^2}$$

$$\gamma_x = f''(t) \quad \gamma_y = g''(t) \quad \gamma_z = h''(t)$$

$$\gamma = \sqrt{f''(t)^2 + g''(t)^2 + h''(t)^2}$$

۱۹ — هدگراف — اگر از نقطه  $A$  در هر لحظه

برداري همسنگ سرعت رسم کنیم انتهای این بردار منحنی‌ای می‌پیماید که هدگراف نام دارد، پس هدگراف مکان هندسی انتهای بردارهایی همسنگ سرعت است که از يك مبدأ رسم شده باشند.

VII. حرکت همسنگ پیوسته

۲۰ — تعریف — وقتی مسیر متحرك دایره یا قوسی از آن

باشد حرکت را مستدیر گویند .

۱ - معادله حرکت - اگر  $O$  اندازه زاویه مرکزی  $A.O.M$  بر حسب رادیان و  $A$  مبدأ قوس  $s$  و  $O$  مرکز و  $R$  شعاع دایره و  $M$  متحرک مفروض و  $s_0$  مسافت اولیه باشد :

$$s = R\theta - s_0 \quad \text{و} \quad \theta = \varphi(t)$$

۲ - مختصات نقطه  $M$  نسبت به محور  $OA$  و محور عمود بر آن :

$$x = R \cos \theta \quad \text{و} \quad y = R \sin \theta$$

۳ - سرعت زاویه‌ای  $\omega = \dot{\varphi}(t)$

۴ - حامل سرعت مماس بردایره‌مسیر و اندازه آن است

$$v = R\omega \quad \text{یا} \quad v = s' = R\theta'$$

۵ - شتاب زاویه‌ای متحرک عبارتست از  $\frac{d\omega}{dt}$  و

شتاب منتهجه عبارت خواهد بود از  $\omega^2$  یا  $\gamma = R \sqrt{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^4}$

VIII - حرکت مستدیر هتشیاه

۱ - معادله حرکت  $s = R\omega t + s_0$

۲ - سرعت خطی آن  $v = \frac{ds}{dt} = R\omega$

۳ - شتاب  $\gamma = R\omega^2$

IX - تئوری دستگاه مقایسه

۱ - تهر یک مقصود از تغییر دستگاه مقایسه حل این مسئله است :

۴۳ - مسئله - سه جسم صلب  $A$  و  $B$  و  $C$  مقرر و خنثی حرکت  $B$  نسبت به  $A$  و همچنین حرکت  $C$  نسبت به  $B$  معلوم است، حرکت  $C$  به  $A$  را تعیین کنید.  
 $A$  را دستگاه ثابت و  $B$  را دستگاه نسبی مقایسه و حرکتش را نسبت به  $A$  کششی و حرکت  $C$  را نسبت به  $B$  حرکت نسبی و نسبت به  $A$  حرکت منتهجه مینامند.

۴۳ - قضیه - منتهجه سرعت حرکت هر نقطه در هر لحظه مجموع هندسی دو سرعت کششی و نسبی آن خواهد بود.  
 ۴۴ - قضیه - هرگاه حرکت کششی انتقالی باشد شتاب منتهجه مساوی منتهجه شتابهای کششی و نسبی است.

#### ۱- حرکت انتقالی

۴۵ - تعریف - جسم  $M$  نسبت به دستگاه ثابت  $A$  دارای حرکت انتقالی است هرگاه هر خط غیر مشخص از جسم  $M$  موازی خط ثابتی از دستگاه  $A$  باشد، لذا شرط لازم و کافی برای اینکه جسمی دارای حرکت انتقالی باشد اینست که همیشه دو خط متقاطع آن موازی دو خط ثابت از دستگاه مقایسه باشند.

۴۶ - قضیه - وقتی جسمی حرکت انتقالی کند (۱) مسیر تمام نقاطش قابل انطباقند (۲) در هر لحظه سرعت های جمیع نقاطش بردارهای همسنگند (۳) بردارهای شتاب در هر لحظه همسنگند.

## XI = دوران

۴۷ - تعریف - هرگاه دو نقطه از جسمی ضمن حرکت نسبت بیکدیگر ثابت بمانند آن جسم حول خطی واصل بین آن دو نقطه دوران میکنند و آن خط را محور دوران گویند مسیر هریک از نقاط جسم ضمن دوران دایره ایست عمود بر محور دوران - حامل دوران محملش محور دوران و جهتش نسبت به جهت دوران نقاط ثابت و کمیتش مساوی انداز عددی سرعت زاویه ای یک نقطه جسم در لحظه معین است، سرعت هر نقطه از جسم ضمن دوران در هر لحظه مساوی عزم حامل دوران در آن لحظه نسبت بآن نقطه میباشد .

## علم القوی ( Dynamique )

تعریف :

- ۴۸ - علم القوی یا دینامیک در حرکات و علل موجودات آنها بحث میکند .
- ۴۹ - چون تعادل اجسام حالت خاصی از حرکت است علم تعادل قوی یا استاتیک ( Statique ) حالت مخصوصی از دینامیک میباشد .
- ۵۰ - اصل جبر Principe de l'inertie ( کپلر ) - نقطه مادی بتودی خود از سکون یا از حرکت یسکون در نمیآید .
- ۵۱ - نتیجه - اگر نقطه مادی ساکن باشد و



عاملی بر آن اثر نکند همواره ساکن میماند .  
 (۲) اگر نقطه مادی متحرک باشد و عاملی بر آن اثر نکند همواره متحرک بوده حرکتش مستقیم الخط متشابه است .  
 (۳) تغییر وضع نقطه مادی از حرکت بسکون یا بالعکس در اثر عاملی است که قوه نامیده میشود .  
 ۳۲ — اثر قوه بر نقطه مادی تولید شتاب در آن میبشد .  
 ۳۳ — همواره بین قوه وارد بر نقطه مادی و شتاب نظیر آن نسبت ثابت  $m = \frac{F}{a}$  برقرار است مقدار این نسبت ثابت  $m$  را جرم نقطه مفروض مینامند .

۳۴ — رابطه  $m = \frac{F}{a}$  را رابطه اصلی مکانیک نام دارد .  
 ۳۵ — جسمی که در خلاء رها شود بعد-ور قسائم بسمت زمین فرود میآید و حرکتش متشابه التغییر است . قوه ای که باعث این شتاب ثابت میشود وزن جسم است پس بین  $P$  و وزن جسم و  $m$  جرم آن و  $a$  شتاب ثقل این رابطه برقرار است :

$$P = mg$$

۳۶ — بین  $P$  و  $P'$  و وزنهای دو جسم و  $m$  و  $m'$  جرم-های آنها در هر نقطه از زمین این رابطه برقرار است :

$$\frac{P}{P'} = \frac{m}{m'}$$

۳۷ — اصل استقلال آثار قوا ( گالیله ) — اثر چند قوه که با هم بر یک نقطه مادی وارد شوند نظیر همان اثریست که مجموع هندسی آنها در آن نقطه تولید کند .

۴۸ - اصل تساوی عمل و عکس العمل (نیوتن) هر عملی عکس‌العملی مساوی و درجهت مخالف با خود ایجاد میکند .

### XIII - تعادل نقطه مادی

۳۹ - نقطه مادی در حال تعادل است وقتی که تحت تأثیر هیچ قوه‌ای نباشد، یا قوایی که بر آن وارد میشوند شتابی در آن ایجاد نمایند . در این حال اگر نقطه سرعته داشته باشد مطابق اصل کیلر حرکت آن همیشه مستقیم‌الخط متشابه است و تعادل چنین نقطه‌ای را تعادل دینامیکی مینامند؛ ولی هرگاه نقطه در لحظه معینی ساکن باشد همیشه ساکن خواهد بود و تعادلش تعادلی استاتیکی است .

۴۰ - نقطه را آزاد گویند وقتی که بتواند در اثر قوای وارده در جهات مختلف حرکت کند در غیر اینصورت نقطه غیر آزاد است .

۴۱ - نقطه غیر آزاد تحت تأثیر دو نوع قوه است :

۱ - قوای مستقیم (مانند وزن نقطه)

۲ - قوای وابسته که بوسیله موانع ایجاد میشوند .

### XIV - استاتیك نقطه آزاد

۴۲ - قضیه - شرط لازم و کافی برای تعادل نقطه مادی

آزادی که تحت تأثیر چند قوه واقع شود اینست که نتیجه این

قوا صفر باشد. شرط فوق بطریق تحلیلی اینطور بیان میگردد :

اگر  $(X_1 \text{ و } X_2 \text{ و } \dots \text{ و } X_n)$  و  $(Y_1 \text{ و } Y_2 \text{ و } \dots \text{ و } Y_n)$

و (  $Z_1$  و  $Z_2$  ... و  $Z_n$  ) تصاویر قوا و  $X$  و  $Y$  و  $Z$  تصاویر  $R$  منتجه آنها بر سه محور مختصات متعامد باشند شرط تعادل اینست که  $\Sigma = 0$  یعنی :

$$\Sigma X = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n = 0$$

$$\Sigma Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_n = 0$$

$$\Sigma Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n = 0$$

۴۴- رابطه استوین (Stevin) - برای اینکه نقطه

مادی در تحت تأثیر سه قوه بحال تعادل باشد لازم و کافی است که :

- ۱- هر سه قوه در يك صفحه باشند .
- ۲- هر کدام خارج زاویه دو قوه دیگر قرار گیرد .
- ۳- مقدار هر يك متناسب با جیب زاویه بین دو قوه دیگر باشد یعنی :

$$\frac{F_1}{\sin(\alpha_2 \text{ و } \alpha_3)} = \frac{F_2}{\sin(\alpha_1 \text{ و } \alpha_3)} = \frac{F_3}{\sin(\alpha_1 \text{ و } \alpha_2)}$$

۷- لامدا قیام نقطه غیر آزاد

۴۴- هر گاه نقطه ای در تحت تأثیر قوای چندی که بر آیند

آنها  $\Sigma = 0$  باشد بر يك سطح یا يك منحنی تغییر مکان دهد ممکن است : ۱) فقط بتواند بر سطح یا منحنی تغییر مکان دهد ولی از آن نتواند جدا شود ؛

(۲) بر سطح متكى باشد و یمنى بتواند از یکجهت از سطح جدا شود؛ در اینصورت اثر  $R$  فقط آنستكه نقطه را بر روی سطح نگاه میدارد.

۴۵ — فشار و عكسى **الهمل** — نقطه غیر آزاد  $M$  در تحت تاثیر  $R$  برآیند قوای وارد بر آن، بر سطح یا منحنى عملى مساوى  $R$  بنام فشار وارد میآورد و سطح یا منحنى در مقابل بر نقطه  $M$  فشار متقابلى مانند  $R^?$  موسوم به عكسى-**الهمل** وارد میسازد. عكسى **الهمل** قوه ایست وابسته به  $R^?$  مساوى  $R$  و درجهت مخالف آنست.

۴۶ — **اصطكاك** — (۱) ممکنست سطح یا منحنى کاملاً صیقلی (بی اصطكاك) باشد.  $R^?$  و  $R$  بر آن عمودند. (۲) و نیز ممکنست خشن (با اصطكاك باشند) و در اینصورت  $R^?$  و  $R$  با آن زاویه ای میسازند، مقدار این زاویه بستگی با درجه خشونت (اصطكاك) جسم دارد.  $0$  زاویه  $R^?$  و  $R$  با سطح یا منحنى را زاویه **اصطكاك** و  $1/0$  را ضریب **اصطكاك** میگویند.

۴۷ — مخروطی که رأسش نقطه مادی واقع بر سطح و محورش عمود بر سطح و زاویه رأسش دو برابر زاویه اصطكاك باشد به مخروط **اصطكاك** معروف است.

۴۸ — **قضیه** شرط لازم و كافی برای اینکه نقطه مادی واقع بر سطح یا منحنى بی اصطكاك بحال تعادل باشد آنست که  $R$ ، منبجه قوای وارد بر سطح یا منحنى عمود بوده و نقطه را بر آن بچسباند.

۴۹- قضیه - شرط تعادل نقطه مادی واقع بر سطح یا منحنی با اصطکاک آنست که زاویه بین  $R$  برآیند قوا و قائم بر نقطه از زاویه اصطکاک کوچکتر باشد یا عبارت دیگر منتهجه قوا داخل مخروط اصطکاک و یا منطبق بر سطح آن باشد .

۵۰- قوانین اصطکاک (Coulomb) :

- ۱- قوه اصطکاک حد با فشار قائم متناسب است .
- ۲- قوه اصطکاک بوسعت سطح اتکابستگی ندارد .
- ۳- قوه اصطکاک بجنس سطح و میران صیقلی بودن آن و ماده ای که سطح را بآن اندوده باشند بستگی دارد .

### XV - دینامیک نقطه

- ۵۱- موضوع دینامیک تعیین روابط بین قوه و شتاب و سرعت و کار است .
- ۵۲- اثر قوه تولید شتاب است در متحرک . شتاب باعث تغییر سرعت است .

۵۳- دستورهای اصلی دینامیک - اگر  $X$  و  $Y$  و  $Z$  تصاویر قوه  $R$  بر سه محور و  $\frac{dx}{dt}$  و  $\frac{dy}{dt}$  و  $\frac{dz}{dt}$  تصاویر شتاب بر  $T$  آنها باشند .

$$\frac{md^2x}{dt^2} = X ; \frac{md^2y}{dt^2} = Y ; \frac{md^2z}{dt^2} = Z ; m = my ; R = m \gamma$$

یکمک دستورهای اصلی دینامیک میتوانست این دو مسئله را حل کرد :



۲ —  $v_z = \pm \sqrt{v_0^2 - gz}$  میباشند که یکی سرعت صعود و دیگری سرعت نزول است.

۶ — زمان صعود تا هر نقطه از مسیر مساوی زمان برگشت از آن نقطه به محل اولیه میباشند.

۵۵ — ثابتاً حرکت سهمی شکل.

۱ — اگر جسمی بجرم  $m$  در مبدأ زمان  $(t=0)$  از مبدأ  $O$  با سرعت اولیه  $v_0$  در امتداد یک خط با افق زاویه  $\alpha < 90^\circ$  دارد در خلاف پرتاب شده باشد تنها قوه ای که بر آن وارد میشود وزن آن خواهد بود و مسیر حرکت منحنی مسطحی است که در صفحه قائم  $OX$  قرار دارد.

۲ — قوانین حرکت

$\left. \begin{array}{l} \text{عمودی به محور} \\ \text{قائم} \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dz}{dt} = v_z \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -g \end{array} \right.$	$v_z = \pm \sqrt{v_0^2 - 2gz}$
		$v_z = v_0 \sin \alpha - gt$
		$z = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t$
$\left. \begin{array}{l} \text{عمودی به محور} \\ \text{افقی} \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = v_x \\ \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \end{array} \right.$	$v_x = v_0 \cos \alpha$
		$x = v_0 \cos \alpha \cdot t$
		$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$

۳ — معادله سهمی مسیر

$$x^2 = 1/\alpha \cdot (1 - \cos \alpha) \quad \text{و} \quad y = \frac{1}{\alpha} (1 - \cos \alpha)$$

۴ - ارتفاع نقطه اوج و زمان رسیدن به آن

$$v_0^2 \sin^2 \alpha \quad \text{و} \quad \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}$$

۵ - برد پامیدان حرکت:  $\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}$

۶ - هدگراف (میداء) (خط

خط  $v_0 \sin \alpha$  (موازی Oz)

۷ - دوفاصله  $\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}$  حرکت محیطه، در آن لحظه

سرعت می نیم و مساوی  $v_0 \sin \alpha$  و پس از آن حرکت منسره می باشد.

۸ - در هر نقطه بار ارتفاع  $z = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$

۹ - پارامتر سهمی  $\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}$  و فاصله مادی از مبدأ

$$\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \text{ است}$$

۱۰ - معادله سهمی اطمینان:

$$z = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

XVIII - حرکت نقطه مادی غیر آزاد

۵۶ - حرکت بی اصطکاک - نقطه M روی یک منحنی

صیقلی تحت تأثیر قوه R و عکس العمل R' تغییر مکان میدهد:

تصور بر R بر قائم بر صفحه در امتداد R' است و بخشی میشود و فقط

تصور بر R بر مماس بر سطح است که M را بحرکت در می آورد.



اگر تصویر  $R$  بر مماس را  $R_t$  بنامیم : بموجب رابطه  

$$F = m\gamma$$

$$R_t = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

این رابطه را معادله اصلی Intrinsèque حرکت میگویند .  
 ۵۷- حرکت با اصطکاک - در این صورت عکس العمل  
 $R'$  یا سطح زاویه ۰ (زاویه اصطکاک) میسازد و قوای مؤثر بر  
 نقطه عبارتست از برآیند تصاویر  $R$  و  $R'$  بر مماس بر سطح .  
 پس :

$$R_t + R'_t = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

۵۸- مثال : حرکت نقطه بر سطح مورب - اگر  
 زاویه سطح مورب را با افق  $\alpha$  و سرعت اولیه حرکت را  
 $v_0$  بنامیم :

(۱) بی اصطکاک : اگر  $v_0 = 0$  باشد

$$x = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2 ; v = g \sin \alpha t ; y = g \sin \alpha$$

هرگاه  $v_0$  صفر نباشد

$$y = g \sin \alpha ; v = g \sin \alpha t + v_0$$

$$x = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2 + v_0 t$$

هرگاه  $v_0 < 0$  باشد (طرف بالا منقبض می شود) حرکت نازمان  
 $t = \frac{v_0}{g \sin \alpha}$  مبدلت (دوبالا) و از آن پس سرعت (دو

## حرکت نقطه مادی غیر آزاد

۳۰۵

بیانین) خواهد بود .

۲ - با اصل کالت

زاویه اصل کالت را ضمن حرکت  $\theta$  فرض میکنیم نقطه

MI تحت تأثیر وزن خود (mg) و عکس العمل  $R^3$  می باشد ؛

۱) حرکت بعطف پائین :  $v_0 = 0$  - قوانین حرکت عبارتند از :

$$v = \frac{g \sin(\alpha - \theta)}{\cos \theta} t \quad v_0 = 0$$

$$s = \frac{1}{2} g \frac{\sin(\alpha - \theta)}{\cos \theta} t^2 \quad v_0 = 0$$

موقعی که  $\theta = 0$  می باشد اگر  $v_0 = 0$  باشد نقطه بحال

تعادل خواهد ماند و اگر  $v_0 \neq 0$  باشد تا زمان  $\frac{v_0 \cos \theta}{g \sin(\theta - \alpha)}$

حرکت مستقیم می باشد و از این بعد متحرک در فاصله

$$s = \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{2g \sin(\theta - \alpha)}$$

موقعی که  $\theta = 0$  می باشد اگر  $v_0 = 0$  باشد نقطه بحال

تعادل خواهد ماند و اگر  $v_0 \neq 0$  باشد حرکت متشابه می شود .

موقعی که  $\theta = 0$  باشد حرکت متشابه التپییر مسرعه است .

۲) حرکت بعطف بالا :  $v_0 \neq 0$  - قوانین حرکت عبارتند از :

$$\frac{\sin(\alpha - \frac{1}{2}\pi)}{\cos 0} g = v_0 \quad \text{و} \quad \frac{\sin(\alpha - \frac{1}{2}\pi)}{\cos 0} v_0 = \frac{\sin(\alpha - \frac{1}{2}\pi)}{\cos 0} g$$

$$v_0 = \frac{g}{\sin(\alpha - \frac{1}{2}\pi)} \quad \text{و} \quad v_0 = \frac{g}{\sin(\alpha - \frac{1}{2}\pi)}$$

تا زمان  $\frac{v_0 \cos 0}{g \sin(\alpha - \frac{1}{2}\pi)}$  حرکت معکوس و میخیزد و در این زمان متحرک میماند.  $\frac{v_0 \cos 0}{g \sin(\alpha - \frac{1}{2}\pi)}$  قرار داشته و از این بعد حرکت وضع حالت اول (شماره ۹-۱) را بشود میگیرد  $XIX =$  گار

۵۰ - اگر نقطه مادی  $M$  در اثر نیروی  $I^2$  و در امتداد  $F$  تغییر مکانی مساوی  $IDID^2$  دهد کاری مساوی  $(I^2)(IDID^2)$  انجام شده است.  $T =$

۶۰ - هرگاه  $\alpha$  زاویه بین حامل  $I^2$  و امتداد  $IDID^2$  باشد کار عبارت خواهد بود از:  $(IDID^2)$  و  $(I^2)$   $T = F \cdot IDID^2$  یا این کار مثبت است هرگاه  $\alpha < \frac{\pi}{2}$  یا

$\alpha > \frac{3\pi}{2}$  باشد و آنرا کار معرک نامند و منفی است وقتی که  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  باشد و آنرا کار مقاوم نامند؛ اگر  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  یا  $\alpha = \frac{3\pi}{2}$  باشد کار صفر است.

$XIX =$  قوه حیات (Vivere-vivo)

۶۱ - هر یک - فرس و یو یا قوه حیات یک نقطه مادی بجز

۱۱۱ که با سرعت  $v$  حرکت کند عبارتست از  $mv^2$   
 ۶۲ - نصف فرس ویو ( $mv^2$  -  $\frac{1}{2}$ ) را انرژی حرکتی  
 (Energy cinétique) نقطه گویند.

۶۳ - قضیه - تغییرات انرژی حرکتی یک نقطه مادی  
 متحرک بین دو نقطه  $a$  و  $b$  مساویست با حاصل جمع کارهای  
 قوای وارد بر نقطه بین این دو لحظه.

XXXI - لا محاله قوای یک جسم صلبیه

۶۴ - قوای وارد بر جسم صلب عبارتند از: ۱) قوای  
 خارجی ۲) قوای درونی.

۱) قوای خارجی از نقاط مادی خارج از جسم ناشی  
 میشوند و خود بدو قسمت میشوند: ۱) قوای مستقیم ۲) قوای  
 ارتباطی خارجی.

۲) قوای درونی از اعمال متقابل نقاط خود جسم ناشی  
 میگردند و عبارتند از عکس العمل های ملکولی و قوای  
 ارتباطی داخلی.

۶۵ - جسم صلب را در حال تعادل استاتیکی گویند  
 وقتی که اگر آنرا بدون سرعت اولیه بحال خود گذارند در اثر  
 قوای وارد بر آن نسبت بدستگاه مقایسه بیحرکت بماند.

۶۶ - شرط لازم برای اینکه جسمی در حال تعادل باشد  
 آنست که  $(\sum R)$  مجموع هندسی قوای خارجی وارد بر آن  
 و  $(\sum i)$  منتهجه عزم این قوا صفر باشد یعنی:  $(\sum R)$  و  
 $(\sum i)$

۶۷- تعادل دستگاهها - دو دستگاه قوا متعادلند وقتی که اثر آنها در یک جسم یکسان باشد .

۶۸- قضیه - شرط لازم برای تعادل دو دستگاه قوا آنست که مجموع هندسی آنها با هم و منتهجه عزمشان نسبت به نقطه غیر مشخصی با هم مساوی باشند یعنی  $(OR^4) = (OR^4)$  و  $(OR^4) = (OR^4)$  است . این شرایط برای اجسامی که تغییر شکل نمیدهند لازم و کافی است .

## XXII - اعمال مقدماتی

همیشه میتوان بوسیله اعمالی بنام اعمال مقدماتی دستگاه قوای بدستگاهی دیگر معادل یا آن تبدیل نمود . این اعمال عبارتند از :

- ۱- لغزاندن قوه بر محصل آن .
- ۲- تبدیل چند قوه متقارب به مجموع هندسی آنها و بعکس تجزیه یک قوه به مؤلفه های خود .
- ۳- اضافه یا کسر نمودن دو قوه متقابل .

۶۹- بوسیله اعمال مقدماتی دستگاه قوای وارد بر جسم را بدستگاهی معادل یا آن که مؤلفات کمتری داشته باشد تبدیل میکنند و از این راه حالت و وضع حرکت جسم را تعیین مینمایند .

۷۰- مشخصات مرکز قوای موازی - اگر بیچند نقطه ماده ای  $A_1$  و  $A_2$  و  $\dots$  و  $A_n$  از یک جسم بشرتیب قوای موازی

یکدیگر با مقادیر جبری  $F_1$  و  $F_2$  و ... و  $F_n$  وارد شوند و مختصات نقاط مذکور نسبت به سه محور متعامد  $(x_1, y_1, z_1)$  و  $(x_2, y_2, z_2)$  و ... و  $(x_n, y_n, z_n)$  و مختصات مرکز این قوا  $x$  و  $y$  و  $z$  باشند :

$$x = \frac{x_1 F_1 + x_2 F_2 + \dots + x_n F_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n} = \frac{\sum F_n x_n}{\sum F_n}$$

$$y = \dots = \frac{\sum y_n F_n}{\sum F_n} \quad \text{و}$$

$$z = \dots = \frac{\sum z_n F_n}{\sum F_n}$$

وقتی قوای مرکز بود باید یکدیگر مساوی باشند مختصات مرکز آنها چنین میشود :

$$x = \frac{\sum x_n}{n} \quad \text{و} \quad y = \frac{\sum y_n}{n} \quad \text{و} \quad z = \frac{\sum z_n}{n}$$

۷۱ - قضیه - همیشه ممکن است قوای وارد بر جسمی را به سه قوه که نقاط اثرشان سه نقطه دلخواه واقع بر یک استقامت باشند تبدیل نمود .

۷۲ - قضیه - ممکن است قوای وارد بر جسمی را به سه قوه که یکی از آنها بر نقطه اختیاری معینی وارد شود تبدیل نمود .

III - مرکز ثقل

۷۳ - تعریف - اوجنست نقاط مادی یک جسم قوای

متوازی قائمی هستند که مرکز آنها مرکز ثقل جسم (ن) است و  
منتجه آنها بردار است قائم که بر نقطه  $G$  میگردد.

۷۴ - مختصات مرکز ثقل - اگر  $m_1$  و  $m_2$  و ... و  $m_n$  به ترتیب جرمهای نقاط مادی  $A_1$  و  $A_2$  و ... و  $A_n$  جسمی باشند و هر یک از نقاط فقط تحت تأثیر قوای حاصل از ورنه خود قرار گیرند مختصات مرکز ثقل ثقل جسم مزبور نسبت به محور مشامد عبارتند از :

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

$$Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

$$Z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

۷۵ - اجسامی که شکل آنها ثابت است اگر هم محلشان تغییر کند یا از وضع اولیه منحرف شوند مرکز ثقلشان تغییر نمیکند.

۷۶ - جسمی را متشابه الاجزاء گویند اگر هر دو جزء متساوی الحجم از آن متساوی الحجم باشند.

۷۷ - قضیه - شکلی که دارای مرکز یا محور یا (سطح تقارن است مرکز ثقلش بر این مرکز یا محور یا سطح تقارن قرار دارد.

۷۸ - یک شکل مستوی (یا یک جسم) دارای یک قطری یا یک صفحه قطری) وابسته یا متبادله است وقتی که جمیع نقاط

## مرکز ثقل

۳۱۶

آن شکل مستوی (یا جسم) را بتوان بدو دسته چنان تقسیم نمود که خط واصل بین هر نقطه یکدسته و نقطه دیگری از دسته دیگر موازی امتداد  $\Delta$  بوده و مساحتش بر آن قطر (یا صفحه قطری) واقع گردد.

۷۹- قضیه- شکلی که دارای قطر یا صفحه قطری نظیر امتداد معینی باشد (۷۸) مرکز ثقلش بر این قطر یا صفحه قطری قرار دارد.

۸۰- مرکز ثقل قطعه خط مستقیم به نقطه وسط آن است.

۸۱- مرکز ثقل محدب مثلث به مرکز دایره محاطی مثلثی است که از وصل مواضع میانه‌های آن بدست می‌آید.

۸۲- مرکز ثقل سطح مثلث به نقطه تلاقی سه بی‌نه آن است.

۸۳- مرکز ثقل چهارضلعی به نقطه تلاقی دو خط واصل بین مراکز ثقل چهار مثلثی است که بترتیب از دو ضلع متقاطع چهارضلعی و یک قطر تشکیل میشود.

۸۴- مرکز ثقل ذوزنقه‌ای بقواعد  $AB$  و  $CD$  و مرکز ثقل  $z$  یقرنی اینک  $AA'$  و  $BB'$  مواضع عمودهای مرسوم از  $z$  بر دو قاعده باشند از این دایعه بدست می‌آید:

$$z = \frac{1}{3} \left( \frac{AB + CD}{2} \right) \quad \text{یا} \quad z = \frac{1}{3} \left( \frac{AB + CD}{2} \right)$$

۸۵- مرکز ثقل متوازی الاضلاع به محل تلاقی دو قطر است.



۸۶ — مرکز ثقل کثیرالاضلاع منتظم — مرکز آن است .

۸۷ — مرکز ثقل دایره — مرکز دایره است .

۸۸ — مرکز ثقل منکسر منتظم بطول ۱ و شعاع دایره محیطی R و وتر منتهی C از این رابطه بدست میآید :

$$OG = \frac{R \cdot C}{1}$$

۸۹ — مرکز ثقل قوسی دایره مقابل وتر AB از دایره ای بمرکز O و شعاع R از این رابطه بدست میآید :

$$GO = \frac{R \cdot AB}{\text{قوس } AB}$$

۹۰ — مرکز ثقل بیضی — محل تلاقی دو قطر آنست .

۹۱ — مرکز ثقل قطاع دایره شعاع R و مرکز O

منطبق بر مرکز ثقل قوسی از دایره به شعاع R است و بهمان مرکز O میباشد اگر به نصف زاویه مرکزی قطاع باشد :

$$OG = \frac{R \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}$$

۹۲ — مرکز ثقل سطح نیمدایره بر روی شعاع عمود

بر قطر و بقاصده  $OG = \frac{4R}{3\pi}$  از مرکز دایره قرار دارد .

۹۳ — مرکز ثقل متوازی السطوح نقطه تلاقی دو قطر آنست .

۹۴- مرکز ثقل هرم و مخروط بر مرکز ثقل مقطع صفحه‌ای در آن که بفاصله ۱ از ارتفاع از قاعده بموازات قاعده رسم شده باشد واقع است .

۹۵- مرکز ثقل هرم مثلث القاعده - روی خط واصل بین رأس و مرکز ثقل قاعده‌اش و بفاصله ۳ از رأس قرار دارد .

۹۶- مرکز ثقل منشور و استوانه - محل تقاطع خط واصل بین مراکز دو قاعده با مقطع متوسطش می‌باشد .

۹۷- مرکز ثقل منشور مثلث القاعده - بر وسط خط واصل بین مراکز ثقل دو قاعده‌اش قرار دارد .

۹۸- مرکز ثقل کره بر مرکز آن منطبق است .

۹۹- قضیه گولدن (Guldin) - (۱) سطح حاصل از دوران یک خط مستقیم را از یک سطح معینی حول یک خط از همان سطح که را قطع نکند مساویست با طول را ضرب در طول محیط دایره حاصل از دوران مرکز ثقل را .

(۲) حجم حاصل از دوران سطح یک حول خطی از همان سطح مساویست با حاصل ضرب یک در طول محیط دایره حاصل از دوران مرکز ثقل یک .

#### XXIV- شرط تعادل جسم صلب آزاد

۱۰۰- قضیه - شرط لازم و کافی برای آنکه آزادی صلب تحت تأثیر قوای وارده بحال تعادل باشد آنست که مجموع

هندسی قوای مزبور صفر و منتهجه عرضهای آنها نسبت به هر نقطه صفر باشد.

۱۰۱ — بیان شرط نهاول وطاربی تعادلی — اگر منتهجه تعساویر قوای وارده بر جسم روی سه محور متعامد بترتیب  $X$  و  $Y$  و  $Z$  و تعساویر منتهجه عزم آنها بر سه محور  $L$  و  $M$  و  $N$  فرض شوند موقعی جسم بحال تعادل است که:

$$OR = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} X = 0 \\ Y = 0 \\ Z = 0 \end{array} \right. \quad \text{OR} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} L = 0 \\ M = 0 \\ N = 0 \end{array} \right.$$

XXXV — شرط تعادل جسم حالب قیو آزاد

۱۰۲ — شرط لازم و کافی برای آنکه جسم حالب غیر آزاد تحت تأثیر قوای وارده بحال تعادل باشد آنست که منتهجه قوای مستقیم و عکس العملهای جسم از یک طرف و عزم آنها نسبت بنقطه ثابتی از طرف دیگر مساوی صفر باشد.

۱۰۳ — قضیه — شرط لازم و کافی برای آنکه جسمی که حول محوری ثابت بدون اصطکاک دوران مینماید در تحت تأثیر قوای وارده بحال تعادل باشد اینست که عزم قوای وارده نسبت باین محور صفر باشد.

۱۰۴ — قضیه — شرط لازم و کافی برای تعادل جسمی که حول نقطه ثابت در حرکت بدون اصطکاک دارد اینست که منتهجه عزم قوای وارده نسبت باین نقطه صفر باشد.

۱۰۵ — قضیه — شرایط لازم و کافی برای تعادل جسمی که در حین دوران حول محوری بر روی آن بلغزد اینست که

مجموع تعساویر قوای وارده بر این محور و همچنین عزمهای قوا نسبت به آن صفر باشد .

۱۰۶- **کثیر الاضلاع انتکاء** - از وصل نقاط انتکاء يك جسم بر يك سطح کثیر الاضلاع بدست میآید موسوم به کثیر الاضلاع انتکاء .

۱۰۷- **قضیه** - شرط لازم و کافی برای تعادل جسم متکی بر سطح صیقلی آنست که منتهجه قوای وارده قائم بر سطح بوده و جسم را بر سطح متکی نماید و ضمناً داخل کثیر الاضلاع انتکا باشد .

#### XXVI - ماشینهای ساده

۱۰۸- **تعریف** - ماشینهای ساده دستگاههایی هستند که هر نقطه از آنها بر منحنی مشخص و ثابتی حرکت میکنند و چون ارتباطات کاملی بین اجزاء مختلفه آنها هست یا مشخص بودن و ضم يك نقطه بر مسیرش میتواند اوضاع سایر نقاط دستگاه را معلوم ساخت .

۱۰۹- ماشینهای ساده واسطه بین دو نوع قوه میباشند یکی قدرت (قوای محرک) و دیگری مقاومت . دستگاه و قشی بحال تعادل است که قدرت و مقاومت دستگاهی تعادل تشکیل دهند .

#### اهرمها

۱۱۰- **تعریف** - اهرم جسمی است که حول نقطه ثابتی موسوم بنقطه انتکاء میتواند حرکت کند . طول عمودها تکیه از نقطه انتکاء بر امتداد قدرت با مقاومت وارد شوند بازوی

قدرت یا مقاومت نام دارند .

۱۱۱ — شرط تعادل اهرم آنست که عزم قوای وارد بر آن نسبت بنقطه اتکاء صفر باشد . یعنی  $P_1 \times R_1 = P_2 \times R_2$  (۱) قدرت و  $R$  مقاومت و  $W$  و  $W_1$  طولهای بازوی قدرت و مقاومتند ) یا عبارت دیگر قدرت و مقاومت دارای نتیجه‌ای باشند که از نقطه اتکاء بگذرد .

۱۱۲ — فشار بر نقطه اتکاء نتیجه دوقوه قدرت و مقاومت است یعنی :

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos(\theta)}$$

پس فشار وقتی ماکزیمم است که  $\theta$  که قدرت و مقاومت موازی باشند . درایتموقع فشار مذکور (۱) خواهد بود .

۱۱۳ — انواع اهرم — اهرم بر سه نوع است :

۱ — اهرم نوع اول که در آن نقطه اتکاء بین قدرت و مقاومت واقع است . مانند ترازو و قیچی .

۲ — اهرم نوع دوم که در آن مقاومت بین قدرت و نقطه اتکاء است . مانند پلک چرخه (چرخ رفتگران) و تلمبه .

۳ — اهرم نوع سوم که در آن قدرت بین مقاومت و نقطه اتکاء قرار دارد . مانند چرخ چاقو نیز کنی .

چرخ پهل

۱۱۴ — تعریف — چرخ جامه از استوانه دواری تشکیل شده است موسوم به تله چرخ و در طرفین آن دو استوانه کوچکتر که محورشان بر محور تله چرخ منطبق است و بر پایه تابی

قرار دارند .

۱۱۵ — شرایط تعادل چرخ چاه آنست که اولاً قوای محرک و مقاوم چرخ را در دو جهت مخالف حرکت دهند ثانیاً مقدار آنها متناسب با نسبت عکس شعاع چرخ ( یا طول دسته ) و شعاع تنه باشد یعنی :

$$\frac{r}{R} = \frac{P}{Q} \quad (P \text{ و } Q \text{ قوای محرک و مقاوم و } R \text{ و } r$$

اشعه چرخ و تنه میباشد)

۱۱۶ — انواع چرخ چاه - چرخ چاه بر دو نوع است :

- ۱ - چرخ چاه معمولی که محور آن افقی است و چرخ محرك تبدیل بدسته خمیده ای شده که متصل با ستوانه میشود .
  - ۲ — چرخ چاه معدنی که چرخ محرك آن بزرگ و بشعاع تقریباً ۳۵ متر است و در کنار این چرخ تردهائی است که اگر شخصی روی آنها حرکت کند وزن او چرخ را بحرکت در می آورد و چرخ دوران میکند .
- گریلت یا چك (Grille)

۱۱۷ - تعریف - اسبابی است که برای بلند کردن بار های سنگینی بارتفاع کم بکار میرود و آن عبارتست از يك محور قائم دندانه دار که بوسیله چرخ دندانه داری که حول محور افقی میگردد بالا و پائین میرود .

۱۱۸ - شرایط تعادل چك :  $\frac{r}{R} = \frac{P}{Q} \quad (P \text{ و } Q$

قدرت و مقاومت و  $R$  و  $r$  طول دسته آگرداننده و شعاع چرخ  
دندانه دار است )  
قرقره

۱۱۹ - تهریق - استوانه ایست فلزی یا چوبی که حول  
محور خود میتواند دورانی کند بطرفین محور دوشاخه ای  
متصل است که اگر آنرا بوسیله قلابی بنقطه ثابتی بیاوریند قرقره  
را ثابت والا متحرک نامند .

۱۲۰ - شرط تعادل قرقره ثابت - شرط لازم  
و کافی برای تعادل آنست که مجموع عزم قوای  $(I)$  و  $(J)$  نسبت  
بمحور قرقره صفر باشد ( از اصطکاک صرف نظر میشود ) .

۱۲۱ - قرقره متحرک - در این نوع قرقره باری را  
که باید بلند نمایند بقلاب دوشاخه قرقره آویزان نموده و یک  
سر طنابی را که از روی قرقره و داخل دوشاخه میگذرد بنقطه  
ثابتی وصل نموده و قدرت را بگردی طناب وارد میآورند .  
۱۲۲ - شرط تعادل در قرقره متحرک آنست که عزم قوای  
وارد شده نسبت به نقطه  $(O)$  ( مرکز دایره قرقره ) صفر باشد .

۱۲۳ - از اجتماع چند قرقره موفل (Moufle) تشکیل  
میشود . و اجتماع دو موفل هم نوع را پالان (Palan) مینامند .  
اگر  $I$  قدرت و  $R$  مقاومت و  $n$  عده قرقره ها فرض شود  
شرط تعادل پالان اینست که :

$$I = \frac{R}{2n}$$

# آحاد مهم علمی که در ریاضیات متداول است

توضیحات	M.K.S دستگاه	دستگاه C.G.S	واحدها
دستگاه M.K.S با دستگاه متری آحاد اصلی			آحاد اصلی
عبارتند از: متر (طول)، ثانیه (زمان) و کیلوگرم (فرد)	متر	ماینتر	طول
رادیان = قوسی از دایره مساوی طول شعاع آن	رادیان	گرم	جرم
دین = قوه ای که یک جرم یک گرمی شتاب یکسان میدهد	دین	ثانیه	زمان
در ثانیه یکبار	دین	ثانیه	آحاد مشتق
اسن = (۱۰) دین	اسن	ساینتر مربع	سطح
ارگ = کار یک دین در یک ساینتر	ارگ	«مکعب»	جرم
ژول = (۱۰ <sup>۷</sup> ) ارگ	ژول	رادیان	زاویه
وات = ژول در ثانیه	وات	رادیان	شبه
پیز = ۱۰ <sup>۷</sup> باری	Strene	Dyne	فرد
باری = دین بر ساینتر	کیلوزول	Eng	کلوزینرو
کاری کیچیت = مقدار حرارتی که یک گرم آب را یک درجه گرمتر کند.		ارگ در ثانیه	قدرت
کاری بزرگ = ۱۰۰۰ کاری کوچک	Pieze	Batt	فشار
ترمی = ۱۰۰۰ کاری بزرگ	Thermie	کاری کوچک	مقدار حرارت کاری کوچک



## هیهست

### ۱- کلیات

- ۱- کره سماوی یا قلاک کره موهومی است که مرکزش يك نقطه اختیاری از زمین و شعاعش نامحدود است و کواکب در سطح داخل آن قرار گرفته اند .
- ۲- خط قائم هر نقطه عبارت از امتداد قوه ثقل در آن نقطه است که موازی امتداد شاغول میباشد ( محور بدن هر شخص در روی زمین امتداد قائم را نشان میدهد ) .
- ۳- سمت اذراسی و سمت القدم نقاط تلاقی خط قائم هر نقطه اند یا کره سماوی ، آنکه در بالاست سمت راس و دیگری سمت قدم میباشد .
- ۴- سطح قائم هر نقطه هر سطحی است که بر خط قائم بگذرد .
- ۵- محور عالم خط موهومی است که کره سماوی بدور آن میگردد .
- ۶- قوس بین عالم دو نقطه برخورد محور عالم با کره سماوی هستند . آنکه در نیم کره شمالی است قطب شمال و دیگری قطب جنوب است ( قطب شمال در حدود صورت فلکی بنام خرس کوچک ( دب اصغر ) و مجاورت ستاره جدی و قطب جنوب در حوالی صورت فلکی بنام جدیب جنوبی واقعند ) .

- ۷ — نصف النهار هر نقطه سطح قائمی است که بر محور عالم میگذرد .
- ۸ — سطح افق هر نقطه سطحی است که از آن نقطه بر خط قائم همان نقطه عمود شود .
- ۹ — استوائی فلکی یا مهوری النهار دایره عظیمه‌ای از کره سماویست که عمود بر محور عالم است .
- ۱۰ — مدارات دوایر کوچکی از کرة فلکی موازی معدل النهار میباشند .
- ۱۱ — دایره ساعتی یا نصف النهار هر کوب دایره ایست که بر این کوب و محور عالم میگذرد .
- ۱۲ — زاویه ساعتی هر کوب در هر لحظه قوسی است از معدل النهار محصور بین دایره ساعتی آن کوب و نصف النهار مکان .
- ۱۳ — حرکت یومی — هر کوب در ۲۴ ساعت یکبار حول محور عالم میگردد . چون کواکب ظاهرا بر سطح کرة سماوی قرار دارند بنظر میرسد که کرة سماوی در ۲۴ ساعت یکبار حول محور خود از مشرق بمغرب دوراست میکنند . این حرکت ظاهری را حرکت یومی میگویند . مسیر هر کوب بر یکی از مدارات است .
- ۱۴ — دایرة البروج یا دایرة خسوف و کسوف دایره عظیمه ایست که زمین در آن یکسال حول خود شید میچرخد و سطح آن با معدل النهار زاویه  $23^{\circ} 27' 50''$  تشکیل میدهد .

۱۵ — نقاط اعتدال عبارتند از دو نقطه تلاقی دایره البروج با معدل النهار . آنرا که زمین در موقع رفتن از نیمکره جنوبی به نیمکره شمالی از آن میگذرد نقطه اعتدال بهاری (ربعی) میگویند و  $\gamma$  نام میگذارند ، دیگری را که زمین در موقع رفتن از نیمکره شمالی به نیمکره جنوبی از آن میگذرد نقطه اعتدال پائیزی (خریفی) و  $\gamma'$  مینامند .

۱۶ — نقاط انقلاب دو نقطه از دایره البروجند که هر یک با فاصله ۹۰ درجه از نقاط اعتدال قرار دارند . آنکه در نیمکره شمالی است بنقطه انقلاب تا بستانی یا صیفی و دیگری که در نیمکره جنوبی است بنقطه انقلاب زمستانی یا شتوی موسوم است .

۱۷ — جهت مستقیم و جهت معکوس — اگر شخصی

بر محور عالم قرار گیرد و سر او متوجه شمال باشد هر حرکتی که از طرف راست بچپ او انجام گیرد در جهت مستقیم است و در جهت دیگر ، یعنی از چپ بر راست ، در جهت معکوس .

۱۸ — قطر ظاهری هر کوکب بشعاع  $R$  که با فاصله

۱ از ناظر واقع باشد زاویه  $\alpha$  حادث بین اشعه بصری محدود دایره انتهای قطر کوکب میباشد .

$$\sin \alpha = \frac{R}{\rho}$$

و چون قطر ظاهری بسیار کوچک است و چپ زاویه یا خود

$$\alpha \approx \frac{R}{\rho}$$



۲۱ - ارتفاع قطب مدار ارتفاع قطب از افق هر محل از روی دستور (۱۰۰ - ۹۰) بدست میآید (۲ و ۳) فواصل سمتی کوکب ابدی الخلیجوری در مواقع عبور علیا و سفلی از نصف النهار محل و ۱۱ ارتفاع قطب است .

۲۲ - دستگاه مختصات استوائی ( مختصات معدلی) : بهد و میل - سطح اعلائی استوائی فلکی و نقطه اصلی نقطه اعتدال بهاری و جهت مستقیم ( مخالف حرکت عقربه‌های ساعت) - مختص اول را بهد و دوم را میل میگویند . تمام میل فاصله قطبی نام دارد . مختصات معدلی بستگی با مکان ترصد ندارد .

۲۳ - اندازه بهد - فاصله زمانی بین عبور کوکب از نصف النهار محل و نصف النهار مار بر نقطه اصلی را بوسیله ساعت نجومی بدست آورده و بقرار هر ۱۵ درجه در یک ساعت بعد کوکب را حساب می نمایند .

۲۴ - اندازه میل - اندازه جبری میل هر کوکب از روی دستور کلی : (۱۰۰ - ۱۱) ( با در نظر گرفتن جهت ) بدست میآید (۱۱ میل و ۱۱ ارتفاع قطب و ۱۱ فاصله الراس کوکب در موقع عبورش بنصف النهار میباشد) .

۲۵ - تعیین فاصله قطبی کوکب در مکانی بعرض ۱۰ ( شماره ۳۲) :

در نیمکره شمالی

۱ - برای کوکب ابدی الخلیجوری ( حول قطبی )

- ۲- کواکب رقیبت شوند (دارای طلوع و غروب):  $2. \dots P \dots 180 \dots 2.$   
 ۳- « ابدی الخفاء »  
 $180 \dots 2. \dots P$

در نیم‌گروه جنوبی

- ۱- برای کواکب ابدی الخفاء (حول قطبی):  $P \dots 2.$   
 ۲- « رقیبت شوند (دارای طلوع و غروب):  $2. \dots P \dots 180 \dots 1. \dots P \dots 2.$   
 ۳- « ابدی الخفاء:  $180 \dots 1. \dots P$

(فاصله قطبی کواکب در نیم‌گروه شمالی از قطب شمال

و در نیم‌گروه جنوبی از قطب جنوب است و در نیم‌گروه جنوبی منفی است)

- ۲۶- دستگاه مختصات منطقه‌ای: طول و عرض - صفحه اصلی: دایره البروج و نقطه اصلی نقطه اعتدال ربیعی - جهت مستقیم: نخستین اول: طول، نخستین دوم: عرض.

### III - زمین

- ۲۷- شکل زمین - زمین به شکل کره ایست که در قطب‌هایش کمی فرورفته باشد، نظیر حجمی که از دوران یک نیمه بیضی حول محور انحرافش تولید شود. سطح آن ناصاف و اطرافش راهروائی بقطر تقریباً صد کیلومتر احاطه نموده است.
- ۲۸- دوران زمین - زمین با حرکت متشابه حول محور موهومی که از مرکز ثقلش می‌گذرد دوران می‌کند این محور بر محور عالم منطبق است.

۲۹- خط و سطح قائم و سطح نصف النهار و افق

(شماره های ۲ و ۴ و ۷ و ۸ مراجعه شود).

۳۰ — خط نصف النهار — فصل مشترك سطح نصف النهار هر محل با سطح افق همان مكان را خط نصف النهار آن محل گویند. این خط تصویر محور عالم بر سطح افق محل است.

۳۱ — طول يك نقطه از سطح زمین — زاویه بین نصف النهار محل و نصف النهار نقطه‌ای که مبدأ فرض شده میباشد ( نصف النهار گرینویچ یا پاریس را اغلب مبدأ طولها میگیرند ) اندازه آن از صفر تا  $۱۸۰$  درجه شرقی یا غربی تغییر میکنند ( بر حسب فاصله زمانی بازاء هر ساعت  $۱۵$  درجه محاسبه میشود ) .

۳۲ — عرض يك نقطه از سطح زمین — زاویه بین قائم مكان ( امتداد شعاع زمین در آن نقطه ) با سطح استوا است و همچنین مساویست با ارتفاع قطب از افق آن محل ( شماره ۲۱ )

۳۳ — مدارات — مدارات زمین مكان هندسی نقاطی از زمین میباشد که دارای يك عرض باشند.

۳۴ — استوای زمین — مداری است بر عرض صفر .  
۳۵ — قطبین زمین — دو نقطه از زمین بر عرض  $۹۰^\circ$  میباشد .

۳۶ — شعاع  $r$  افق حسی — اگر  $R$  شعاع زمین و  $h$  ارتفاع شخص ناظر از سطح زمین باشد مقدار  $r$  شعاع افق حسی از روی دستور  $\sqrt{2Rh}$  بدست میآید .

۳۷ — انحنای افق — زاویه‌ای را که رأسش نقطه‌ای از قضا





۴۰ — اندازه شتاب ثقل زمین — در نقطه‌ای از زمین  
 عرض  $45^{\circ}$  و هم سطح با دریا مساویست با  $980.665$  (در  
 دستگاه  $g.c.g.s.$ )

۴۱ — وزن مخصوص زمین — در داخل زمین وزن  
 مخصوص  $5.5$  و نسبت با حجاری واقع در سطح زمین  $5.5$  است —  
 ۴۲ — سرعت حرکت انتقالی زمین در هر ثانیه  $29$   
 کیلومتر است .

۴۳ — مدت حرکت انتقالی زمین بدور شمس  $365$   
 روز و  $5$  دقیقه و  $49$  و  $48$  ثانیه است .

۴۴ — مختصات جغرافیائی تهران — طول تهران از  
 نصف النهار پاریس  $7^{\circ}$  و  $5^{\circ}$  و  $49^{\circ}$  و عرض تهران  $7^{\circ}$  و  $1^{\circ}$  و  $35^{\circ}$   
 میباشد .

#### ۱۷ — نقشه‌های جغرافیائی

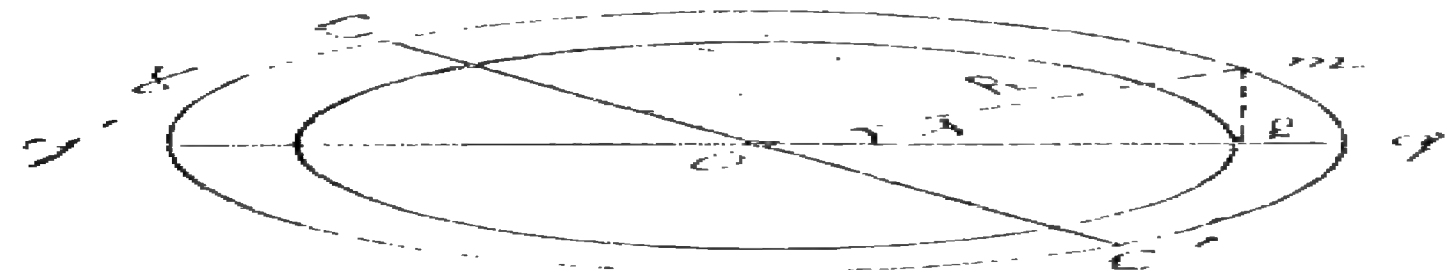
۴۵ — تعریف — نقشه‌های جغرافیائی عبارتند از صفحاتی  
 که تمام یا قطعه‌ای از سطح زمین را با قاعده مخصوص و شیوه  
 معین بر روی آن تصویر نموده یا گسترده باشند .  
 برای ترسیم نقشه قیلاشیکه‌ای از نصف النهارات و مدارات  
 زمین را تهیه نموده و بعد محل هر نقطه را از روی طول و  
 عرضش بر روی آن معین نمایند .

۴۶ — تصویر قائم هر نقطه — بر یک صفحه موقع عمودی  
 است که از آن نقطه بر صفحه وارد شود . این صفحه را صفحه  
 تصویر نامند .

# ۴۷ — رسم نقشه بطریق تصویر قائم :

۱ — سطح تصویر در سطح استوا میباشند : تصویر قطب بر مرکز استوا قرار دارد ، تصویر هر مدار عرض  $\lambda$  دایره‌ایست متعدها سرکز با استوا و شعاع  $r = R \cos \lambda$  ، تصویر هر نصف النهار بطول  $l$  قطری از استوار است که با تصویر نصف النهار مبدأ زاویه  $l$  تشکیل دهد .

طریقه رسم ( ۱ ) برای رسم مدارهای عرض  $\lambda$  از نقطه  $m$  انتهای شعاع  $mm$  که با  $mm$  زاویه  $\lambda$  دارد عمود  $mn$  را بر  $mm$  وارد می‌نمائیم ، دایره‌ای برکز  $O$  و شعاع  $On$  تصویر مدار مفروض است (ش ۲) .



۲ ( قوس  $mm''$  ) را مساوی  $\lambda$  جدا می‌نمائیم  
قطر  $mm''$  تصویر نصف  
النهار بطول  $l$  می‌باشد  
(ش ۲) .

## ۲ ( سطح تصویر در

یکگی از سطح نصف النهار است :  
تصویر مدارات و استوا خط‌سوط فصل مشترک آنها با سطح تصویر است .

تصویر مدارهای عرض  $\lambda$  و تری است سوازی استوا هکند  
فاصله‌اش از آن روی محیط دایره نصف النهار تصویر  $\lambda$  درجه  
است ؛ تصویر هر نصف النهار بطول  $l$  یا بی‌نهایت است که محور



## ۴۸ - تصویر مرکزی (استروگرافیک)

۱- تعریف - بشماره ۳۰۵ و ۳۰۶ قسمت هفتم از مجموعه مراجع شود.

۲- در تصویر مرکزی زاویه مقدار حقیقی تصویر میشوند.

۳- تصویر مرکزی هر دایره دایره است.

## رسم نقشه بطریق تصویر مرکزی

۱- برده سطح استوا است و مرکز تصویر یا نقطه دید یکی از قطبین میباشد، تصویر مداری عرض  $\lambda$  دایره‌ایست

بمرکز استوا و شعاع  $r = R \sin \left( 90^\circ - \frac{\lambda}{2} \right)$

تصویر هر نصف النهار بطول  $\gamma$  قطری از استوا است که یا تصویر نصف النهار مبدأ زاویه  $\gamma$  تشکیل میدهد.

۲- هر یقه رسم - ۱) قوس  $q_m$  را برابر  $\lambda$  جدا نموده از نقطه دید  $V$  به  $m$  وصل میکنیم تا  $q_1$  را در نقطه  $m^{-}$  قطع کند دایره بمرکز  $O$  و شعاع  $Om$  تصویر مدار عرض  $\lambda$  میباشد.

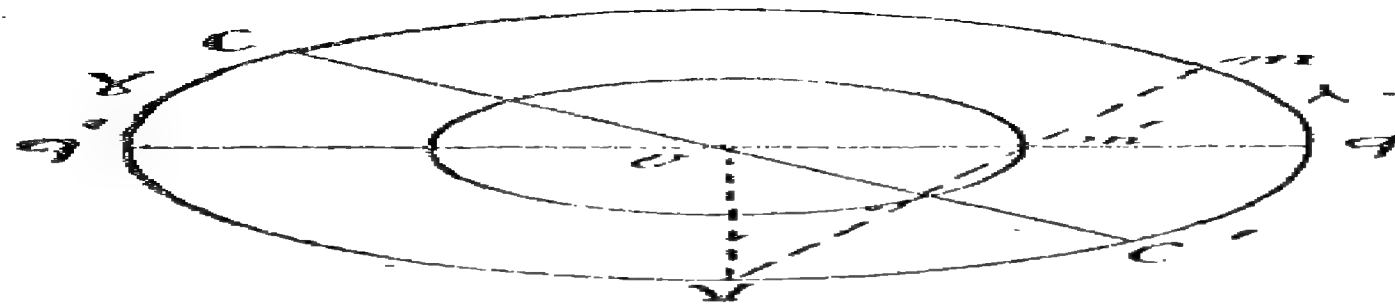
۲) قوس  $q_1$  را مساوی  $\gamma$  جدا میکنیم قطر  $CC^{-}$  تصویر نصف النهار بطول  $\gamma$  میباشد (ش ۴).

۳- برده یکی از سطوح نصف النهار است و نقطه دید انتهای قطری از استوا که عمود بر برده است میباشد.

تصویر هر نیمه مدار عرض  $\lambda$  قوس دایره‌ایست که مرکزش بر خط قطبین و فاصله  $\frac{R}{\sin \lambda}$  از مرکز نصف النهار

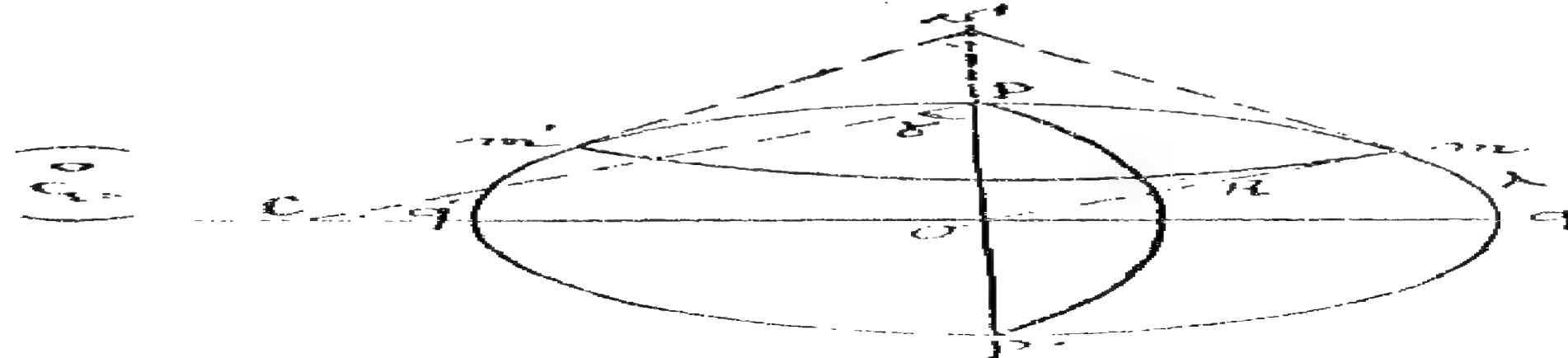
تصویر قرار دارد؛ تصویر هر نصف النهار بطول  $\gamma$  قوس دایره ایست مار بر دو قطب که مرکز آن بر قطر عمود بر خط قطب است و بفاصله  $\gamma/2$  از مرکز است. سطح نصف النهار تصویر قرار دارد.

طریقه رسم ۱) قوس مماس  $mm$  را مساوی  $\gamma$  جدا نموده  $mm$  دایره ای رسم می نمایم قوس  $mm$  از این دایره تصویر نیمه مدار بر خط  $PP$  (۷) از خط  $PC$  را چنان رسم می کنیم که با  $PP$  زاویه  $\gamma$  بسازد، بر مرکز  $C$  نقطه تلاقی این خط با  $PC$  دایره ای رسم می کنیم قوس  $mm'$  از این دایره تصویر نیمه نصف النهار بطول  $\gamma$  می باشد (ش ۵).



(ش ۴)

مماس  $mm$  قطر  $PP$  را در  $P$  قطع می نماید بر مرکز  $C$  و شعاع  $mm$  دایره ای رسم می نمایم قوس  $mm$  از این دایره تصویر نیمه مدار بر خط  $PP$  (۷) از خط  $PC$  را چنان رسم می کنیم که با  $PP$  زاویه  $\gamma$  بسازد، بر مرکز  $C$  نقطه تلاقی این خط با  $PC$  دایره ای رسم می کنیم قوس  $mm'$  از این دایره تصویر نیمه نصف النهار بطول  $\gamma$  می باشد (ش ۵).



(ش ۵)

**خواص و موارد استعمال** — در تصویر مرکزی چون زوایا تغییر نمیکنند تصویر مشابه شکل اصلی هستند و ضمناً هر چه از مرکز بمرکز نقشه نزدیکتر شویم تصویر به حقیقت نزدیکتر میشود. طریقه تصویر مرکزی را برای تهیه نقشه های مسطحه نیمکره زمین و نقشه های ممالک بکار میبرند.

۴۹ — تهیه نقشه بطریق گسترشی استوائی — استوانه مستدیر قائمی بر یک کره معنوعی زمین که بهقیاس معین تهیه شده محیط مینمائیم بطوریکه دو قاعده اش بر قطبین کره مماس شوند بعد فعل مشترکهای سطح نصف النهارات و مدارات را با سطح جانبی استوانه بدست میآوریم و استوانه را روی یک صفحه میگذاریم، شیکه ای بدست میآید که در آن نصف النهارات و مدارات بترتیب بختلوط قائم و انقی نموده شده اند. در این گسترش ناحیه استوائی نزدیک به حقیقت نموده شده و هر چه بقطب نزدیکتر شویم فواصل مدارات و دقت نقشه کمتر میشود.

۵۰ — تهیه نقشه بوسیله گسترشی مخروطی — مخروط قائمی معادی مدار متوسط ناحیه کوچکی که میخواهند نقشه آنجا را تهیه میکنند بر کره محیط مینمائند بطوریکه فعل مشترک نصف النهار با سطح جانبی مخروط بر یکی از مولد های آن منطبق گردد. فعل مشترک سطح مدارات را نیز با سطح جانبی مخروط آورده و مخروط را بر صفحه ای میگذارند؛ شیکه نقشه ای بدست میآید که در آن نصف النهارات

بنخروط متقاطع در يك نقطه ( راس مخروط ) و مدارات به دوائر متحدالمرکزی يمرکز راس مخروط نموده شده اند .  
این نقشه برای ناحیه کوچکی از کره که در طرفین مدار متوسط آن واقع شده است قابل استفاده میباشد .

#### ۷ - مخروط شیب

۵۱ - مدار خورشید - خورشید در جهت مستقیم بدور زمین ( فرض ثابت بودن ) مداری بیضی شکل میبایست که زمین در یکی از کانونهای آن قرار گرفته و خروج از مرکز این بیضی تقریباً  $\frac{1}{60}$  باشد .

۵۲ - میل دایرة البروج - زاویه بین دایرة البروج و استوای فلکی مساوی  $23^{\circ}$  و  $37^{\circ}$  میباشد .

۵۳ - قطر ظاهری خورشید - قطر ظاهری متوسط خورشید  $25'$  و  $31'$  یا با تقریباً  $32'$  میباشد بزرگترین مقدار قطر ظاهری در دیسم ( اول ژانویه  $35^{\circ}$  و  $32^{\circ}$  و کوچکترین مقدار آن در تیرماه ( اول ژوئیه )  $32^{\circ}$ ،  $31'$  است .

۵۴ - اختلاف منظر افقی شمس  $8^{\circ}$  و  $8'$  میباشد

۵۵ - شعاع خورشید - صد برابر شعاع زمین و

مساوی  $695500$  کیلومتر است

۵۶ - وزن مخصوص آن نسبت بآب  $14$  و نسبت

بزمین  $256$  است

۵۷ - جرم خورشید  $3233432$  برابر جرم زمین است .

۵۸ - حجم خورشید  $120000$  برابر حجم زمین است .





نوروز و  $(\alpha)$  میل شمس در این دو موقع و  $(\beta)$  زمان بین  
 ظهر روز قبل از نوروز تا موقع عبور شمس از نقطه  $\beta$  باشد .  

$$D = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \right) \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$$

- ۶۵ - ساختمان آفتاب - اگر از مرکز گذر به سمت محیط مدار و نیم  
 از طبقات زیر بترتیب عبور خواهیم کرد :
- ۱ - هسته مرکزی سیال با درجه حرارت بی اندازم زیاد؛
  - ۲ - یک سطح درختان موسوم به فوتوسفر یا کره نور که  
 از گازهای محترقه تشکیل شده و نوری که بنظر ما میرسد از این  
 طبقه است و کلف های خورشید نیز لکه های سیاهی هستند که  
 در این طبقه جا دارند ؛
  - ۳ - یک اتمسفر بخار موسوم به طبقه تابان که حلیف شمسی  
 از آن حاصل میشود ؛
  - ۴ - یک اتمسفر قرمز رنگ موسوم به کره موسفر یا کره  
 رنگین که مخصوصاً از هیدروژن تشکیل یافته ؛
  - ۵ - یک طبقه شفاف و سفید رنگ که در موقع کسوف به  
 شکل طوق سفید دیده میشود .

## V I - زمان و تقویم

- ۶۶ - زمان نجومی  $II$  بین طلوع و غروب کوی که  
 فاصله قطبیش  $I$  باشد در مکانی عرض  $\phi$  عبارتست از :
- $$P = \frac{1}{\cos \phi} \cos I$$

۶۷ — روز فجوی عبارتست از فاصله دو عبور متوالی مرکز ستاره‌ای از نصف‌النهار معین و طول آن ۲۳ ساعت و ۵۶ دقیقه است .

۶۸ — روز خورشیدی یا شمسی عبارتست از فاصله دو عبور متوالی خورشید از نصف‌النهار معین .  
طول روز شمسی ثابت نیست زیرا سرعت حرکت آفتاب بر روی دایرة البروج ثابت نمیباشد .

۶۹ — خورشید مجازی خورشیدی است که دایرة البروج را در مساحت خورشید حقیقی با سرعت ثابتی پییماید .

۷۰ — روز شمسی مدت مدتی فاصله دو عبور متوالی خورشید مجازی است بر نصف‌النهار معین .

۷۱ — ساعت فجوی ۲<sup>۱</sup>/<sub>۴</sub> روز نجومی و ساعت رسمی ۲<sup>۱</sup>/<sub>۴</sub> روز شمسی متوسط است .

۷۲ — سال مداری یا اکتسابی مدت بین دو عبور متوالی خورشید بر نقطه اعتدال بهاریست و عبارتست از: ۳۶۵ و ۴۷ ثانیه ۸ دقیقه ۵ ساعت ۳۶ و ۳۷ روز ۹۸۷۹۸۲۲ و ۲۵۳ روز

۷۳ — سال فجوی مدت زمانی است که به بعد خورشید از مبدأ نقطه اعتدال بهاری ۳۶۵ و ۴۷ ثانیه ۸ دقیقه ۵ ساعت ۳۶ و ۳۷ روز بگذرد، یا زمان بین دو عبور متوالی شمس بر نصف‌النهار کوکبی است ثابت و عبارتست از:

۹ر۵ ثانیه ۹ دقیقه ۶ ساعت ۳۶۵ روز  
 ۷۴ — فصل اول — فواصل زمان بین عبور خورشید از نقاط  
 اعتدال و انقلاب را چهار فصل می‌نامند .  
 بهار بین نقطه اعتدال بهاری تا انقلاب تابستانی :  
 ۲۱ ساعت ۹۲ روز  
 تابستان « » انقلاب تابستانی تا اعتدال یائیزی :  
 ۱۴ ساعت ۹۲ روز  
 پاییز « » اعتدال یائیزی تا انقلاب زمستانی :  
 ۱۹ ساعت ۸۹ روز  
 زمستان « » انقلاب زمستانی تا اعتدال بهاری :  
 ۱ ساعت ۸۹ روز  
 ۷۵ — معادله زمان — معادله زمان عبارتست از  
 $t_v - t_m$  یعنی تفاضل بین زمان متوسط و زمان حقیقی در  
 یک مکان معین و برای خواندن ساعت آفتابی دانستن آن  
 حتماً لازم است و تغییرات آنرا جدول زیر نشان میدهد :

تاریخ	اول ژانویه	۱۱ فوریه	۱۶ آوریل	۱۴ مه	۱۴ ژوئن
$t_v - t_m$	دقیقه ۳۰	ثانیه دقیقه ۱۴ ۲۶	۳۰	ثانیه دقیقه ۳ ۵۲	۳۰
تاریخ	۲۶ ژوئیه	۱ سپتامبر	۲ نوامبر	۲۴ دسامبر	اول ژانویه
$t_v - t_m$	ثانیه دقیقه ۱۸ ۶	۰	ثانیه دقیقه ۱۶ ۲۰	۰ ۳	۳۰ دقیقه ۴

## تقویم

۷۶ — سال مداری عبارتست از فاصله دو عبور متوالی خورشید از نقطه اعتدال ربیعی .

۷۷ — سال رسمی سالی است مرکب از عدد صحیحی از ایام که در حد اعلائی امکان با سال اعتدالی تطبیق نماید .

۷۸ — تقویم قاعده‌ایست که برای تطبیق سالهای رسمی یا سالهای مداری وضع میگردد .

تقویم در نزد ملل مختلف بیانی مختلف داشته و دارد که مهمترین آنها عبارتند از تقویم مصری ، قیصری ، گرگوار و تقویم جلالی ( فارسی ) .

۷۹ — تقویم مصری — مصریان سال رسمی را ۳۶۵

روز می‌گرفتند ، پس در هر سال در حدود شش ساعت عقب می‌افتادند . بعد از یک در هر سیصد و شصت و پنج سال ۳ ماه در تعیین فصول اختلاف حاصل میشد و هر فصل جای خود را بفصل دیگر میداده پس برای اینکه اول بهار رسمی بعد از یک دوره مجدداً با اول بهار واقعی منطبق گردد باید ۱۴۶۰ سال بگذرد این دوره ۱۴۶۰ ساله را دوره سونیات می‌گفتند .

تقویم قیصری — رومیان نخست سال را ۳۶۴ روز و

بعد مانند مصریان ۳۶۵ روز می‌گرفتند ولی برای جلوگیری از بی نظمی تاریخ مصری هر چندین سال یکبار چند روز بسال رسمی خود میافزودند تا با سال مداری تطبیق کنند .

در ۴۴۰ سال پیش از میلاد ژول سزار قیصر روم بدستکاری

سوزیژن منجم تصمیم باصلاح تقویم گرفت و هر سه سال را ۳۶۵ روز و سال چهارم (کبیسه) را ۳۶۶ روز مقرر داشت .  
تقویم گروگاری - اصلاح قیصری برای تعطیلق سال

رسمی باسال مداری کافی نبود و سال رسمی بااندازه ۲  
روز از سال مداری درازتر بود . پاپ گرگوار هشتم بکلمات  
منجم معروف لیلیو بسال ۱۵۸۲ مقرر داشت که در روز اختلافی  
را که از موقع اصلاح قیصری بوجود آمده بود اصلاح کنند و  
روز ۱۴ اکتبر ۱۵۸۲ را ۱۵ اکتبر بدانند و از آن پس در هر چهار صد  
سال سه سال کبیسه را غیر کبیسه محسوب نمایند .

اکثون در تاریخ مسیحی سالهایی که دو رقم آخر شان  
به ۴ قابل قسمت است کبیسه اند مگر آنها که بدو صفر ختم  
میشوند و سده های آنها بر چهار قابل قسمت نیستند ( مانند  
۱۹۰۰ )

۸۲ - تقویم جلالی - تعدیل گرگواریهم اختلاف  
بین سالهای رسمی و مداری را کاملاً از بین نمیبرد یعنی در هر  
دو هزار سال یکروز اختلاف پیدا میشود .

بهترین تعدیلی که تاکنون در تقویم شده است بوسیله  
عمر خیام و جمعی دیگر مانند عبدالرحمن خازنی در سال ۷۱۴ هجری  
انجام شده است و اختلاف بین سالهای رسمی و مداری در هر  
شش هزار سال یکروز است .

در این تقویم در هر دوره سی و سه ساله هشت سال کبیسه  
و ۲۵ سال غیر کبیسه است باین ترتیب که از آغاز دوره هر سه

سال غیر-کپیسه و ۳ سال چهارم-کپیسه است و در آخر دوره چهار سال  
سال غیر-کپیسه میباشد.

آغاز دوره سی و سه ساله‌ای که فعلاً در آن هستیم سال  
۱۳۱۰ بوده است؛ در این دوره سالهای ۱۲۱۲-۱۲۱۷-۱۲۲۱-۱۲۲۵-  
۱۲۲۹-۱۲۳۳-۱۲۳۷-۱۲۴۰ کیسه میباشند.

۸۳ - تقویم قمری - سال عادی قمری ۱۳۵۴ روز و در سال  
های کبیسه ۳۵۵ روز است و مثلاً بر ۱۲ ماه ۲۹ روزه یا ۳۰  
روزی است .

ماه قمري با ديدن هلال ماه مشخص ميگردد ولي براي  
آنكه وضع ثابتي داشته باشد معمولاً يكماه پيشت و نه روزي  
و ماه ديگر ۳۰ روزه حساب ميشود .

در هر دوره سی ساله یازده سال کبیسه است که عبارتند از سالهای ۲ و ۵ و ۷ و ۱۰ و ۱۳ و ۱۶ و ۱۸ و ۲۱ و ۲۴ و ۲۶ و ۲۹.

DATE \_\_\_\_\_

۸۴ - مدار ماه - قمر بدورد زمین مدار بیضی شتکلی در جهت مستقیم می پیماید که زمین در یکی از کانونهایش قرار گرفته و میل متوسطش نسبت به ایزر القروج  $43^{\circ}$ ،  $8^{\circ}$ ،  $15^{\circ}$  است و این میل در مدت ۱۷۳ روز بین  $5^{\circ}$  و  $(18^{\circ}$  و  $5^{\circ})$  تغییر میکنند.

خروج از مرکزکن این بیضی تقریباً  $0.049$  و  $0.054$  است و  $\frac{1}{18}$  است.

۸۵۔۔۔ دورہ نجومی ( ماہ نجومی ) — رمانیت

مختصّور بین دو مقدار نه متوالی قمر با يك ستاره ثابت و مدتش ۲۷ روز و ۷ ساعت و ۴۳ دقیقه و ۱۱٫۵ ثانیه است .

۸۶ — دوره اعتدالی ( ماه اعتدالی ) — زمان نیست. بین دو مقدار نه قمر با نقطه اعتدال ربیعی و یا قمران بین دو مرور متوالی قمر بیک نصف النهار سماوی و مدتش ۲۷ روز و ۷ ساعت و ۴۳ دقیقه و ۱۱٫۵ ثانیه است .

۸۷ — دوره هلالی ( ماه قمری ) — زمان نیست مخصوص بین دو مقدار نه قمر یا شمس و یا بازگشت قمر یا شمس بر هر يك از نصف النهارات و مدت متوسط آن ۲۹ روز و ۱۲ ساعت و ۴۴ دقیقه و ۱۱٫۵ ثانیه است .

۸۸ — فاصله متوسط ماه از زمین — مساوی ۲۵۰٫۶۰۰ کیلومتر است یعنی ۳۸۴۴۰۰ کیلومتر است این مقدار مر بوط است باختلاف منظر ماه وقتی که  $۲^{\circ}$  و  $۵۷'$  باشد .  
۸۹ — قطار ظاهری متوسط ماه —  $۴۷^{\circ}$  و  $۳'$  و  $۳۱'$  و بزرگترین مقدار آن تقریباً  $۵۰''$  و  $۳۳'$  و کوچکترین مقدارش تقریباً  $۲۲''$  و  $۲۸'$  میباشد .

۹۰ — اختلاف منظر افقی ماه  $۷^{\circ}$  و  $۲'$  و  $۵۷'$  است .

۹۱ — شعاع ماه  $۲۷۲۳/۰$  یا  $\frac{۲۳}{۱۱}$  شعاع استوائی زمین یا  $۱۷۳۷$  کیلومتر است .

۹۲ — وزن مخصوص آن نسبت به آب  $۳/۳۳$  و نسبت به زمین  $۶/۶۰$  است .

۹۳ - جرم ماه - ۱۲۳۰۰۰ یا  $\frac{1}{81}$  - جرم زمین است .

۹۴ - حجم ماه -  $\frac{1}{40}$  - حجم زمین میباشد .

۹۵ - سطح ماه -  $\frac{1}{13}$  - سطح زمین میباشد

۹۶ - وزن اجسام در استوای ماه ۱۶۶۰ برابر و وزن اجسام در استوای زمین است .

۹۷ - مدت گردش ماه به قمر در مدتی مساوی دوره نجومی یا یکماه نجومی یعنی ۲۷ روز و ۷ ساعت و ۴۳ دقیقه و ۱۱ ثانیه بدور خود میگردد .

۹۸ - قسمتی از ماه که قابل رویت میباشد  $\frac{59}{100}$  - سطح کل آن میباشد .

۹۹ - عقداتی که در نقاط تلاقی مدار ماه با دایره البروج بنام عقدتین موسوم است یکی عقده رأس و دیگری عقده ذنب قمر پس از عبور از عقده رأس شمالی و پس از عبور از عقده ذنب جنوبی میگردد عقده رأس روزی ۶۳۰ و ۱۰۰ و ۳۰ روی دایره البروج عقب میرود یعنی در مدت ۶۷۹۳۰ روز یا تقریباً ۱۸ سال و ۲ سال یکبار دایره البروج را طی مینماید .

VIII - خسوف و کسوف

۱۰۰ - خسوف ماه ( گرفتن ماه ) - فاصله  $\triangle$  رأس



منحرف و خط ظل زمین حاصل از تابش آفتاب بر آن از مرکز زمین  
بقرص اینک ۱ شعاع زمین و ۱ قطر ظاهری آفتاب و ۱ اختلاف  
منظرات آن باشد عبارتست از :

$$P \sin \frac{1}{2} \Delta = \frac{d}{2} \sin \frac{1}{2} \Delta$$

میتوان در این فورمول به جای چپ‌زاویه‌های کوچک  $۱۶'۲۰''$  و  $\frac{1}{2} \Delta$   
و  $۸۰'۸'' = I'$  مقدار این زوایا را بر حسب رادیان گذاشت  
در اینصورت چنین بدست می‌آید :

$$۲۱۶۱ = \frac{۲۰۶۶۶۵}{۸۰۸ - ۸۶۲} \times \frac{1}{2} \Delta$$

۲- بقرص اینک ۲ عرض ماه در لحد ظل منور و ۱ قطر  
ظاهری آفتاب و ۱ قطر ظاهری ماه و ۱ اختلاف منظرات  
خورشید و ۱ اختلاف منظرات ماه باشد :

$$P \sin \frac{1}{2} \Delta = \frac{d}{2} \sin \frac{1}{2} \Delta$$

برای اینک خسوف جزئی بدست دهد :

$$P \sin \frac{1}{2} \Delta = \frac{d}{2} \sin \frac{1}{2} \Delta$$

$$۱۶'۲۰'' \sin \frac{1}{2} \Delta = \frac{۲۰۶۶۶۵}{۸۰۸ - ۸۶۲} \sin \frac{1}{2} \Delta$$

$$۱۶'۲۰'' \sin \frac{1}{2} \Delta = \frac{۲۰۶۶۶۵}{۸۰۸ - ۸۶۲} \sin \frac{1}{2} \Delta$$

تغییر میکنند .

۱۰۱ - کسوف - ( گرفتن خورشید ) - ۱ - فاصله  $\triangle'$  راس مخروط ظل ماه حاصل از تابش بر آن از مرکز ماه بقرص اینک که ۲ شعاع زمین و ۱ قطر ظاهری خورشید و  $\triangle'$  اختلاف منظر آن و ۱ قطر ظاهری ماه باشند عبارتست از:

$$\triangle' = \frac{rsin\phi}{sin\phi - sinP}$$

میتوان در این فورمول بجای سینوس زاویه کوچک  $\triangle'$  و ۱۶۶ - مقدار آنرا بر حسب رادیان قرار داد لذا با

توجه باینکه نسبت  $\frac{sin\phi}{sinP}$  همان نسبت شعاع ماه به شعاع زمین

یعنی  $\frac{۳}{۱۱}$  میباشد مقدار  $\triangle'$  بصورت زیر درمیآید :

$$\triangle' = \frac{۲۰۶۲۶۵}{۹۶۲} \times \frac{۳}{۱۱} = ۵۹۲$$

۲ - بقرص اینک که ۲ عرض قمر در لحظه مفروض و ۱ قطر ظاهری آفتاب و  $\triangle'$  قطر ظاهری ماه و  $\triangle'$  اختلاف منظر آفتاب و  $\triangle'$  اختلاف منظر ماه باشد .

برای اینک که کسوف در بعضی از نقاط زمین دیده شود سنی در موقع مقارنه داشته باشیم

$$\triangle' - \triangle - \frac{۱}{۲} = P - P' = \lambda$$

برای اینکه کسوف کلی یا حلقوی در بعضی از نقاط زمین دیده شود بایستی داشته باشیم ،

$$d' - d = \frac{1}{2} (P' - P) \quad (1)$$

عبارت  $d' - d = \frac{1}{2} (P' - P)$  بین  $(۱۰ و ۲۴)$  و  $(۱۰ و ۳۴)$

و عبارت  $d' - d = \frac{1}{2} (P' - P)$  بین  $۵۳ و ۶۳$  تغییر میکنند .

IX = قانون هیئت

۱۰۲ - قوانین کپلر - قانون اول - سیارات حول آفتاب در جهت مستقیم بیضی هائی نزدیک بدایره میپیمایند که خورشید در یکی از دو کانون آن قرار دارد .

قانون دوم - مساحتائی که شعاع حامل هر سیاره ( خط واصل بین خورشید و سیاره ) در زمانهای متساوی میپیماید معادل میباشد .

قانون سوم - مجذورات زمانهای سیارات که سیارات صرف پیمودن مداراتشان میکنند متناسباند با مکعبات مجذور اطول مداراتشان یعنی اگر  $a$  و  $a'$  زمانهای دوره نجومی و  $A$  و  $A'$  بترتیب طول مجذور های اطول مدارات دو سیاره باشند :

$$\frac{a^3}{A^3} = \frac{a'^3}{A'^3}$$

۱۰۳ - قانون نیوتن - ( قانون جاذبه عمومی ) - هر گاه دو ستاره بر طبق قوانین کپلر بدور یکدیگر بگردند بوسیله

مستقیم جرمشان و نسبت عکس معذور فاصله شان یکدیگر را جذب میکنند یعنی اگر  $m$  و  $m'$  اجرام و  $a$  فاصله دو کوکب باشند نیروی جذب آنها نسبت به یکدیگر عبارتست از

$$K \times \frac{mm'}{a^2}$$

$K$  ضریبی است ثابت و عبارتست از قوه جاذبه ایکه واحد جرم بر واحد جرم در واحد فاصله وارد آورد و مقدارش در دستگاه (C.G.S.) عبارتست از  $\left(\frac{1}{9800000000000000}\right)$  دین (قانون فوق کلی است و بین هر دو جسم ثابت و برقرار میباشد.)

۱- سیارات

۱۰۴- سیارات عمده در دستگاه منظومه شمسی بتدریج از نزدیکترین آنها بخورشید عبارتند از :  
۱- عطارد ۲- زهره ۳- زمین ۴- مریخ ۵- مشتری ۶- زحل ۷- اورانوس ۸- نپتون

بین مریخ و مشتری دسته سیارات کوچک قرار گرفته اند ۱۰۵- قانون بک - اعداد ۰، ۲، ۳، ۶، ۱۲، ۲۴، ۴۸، ۹۶ را که از دومی بعد هریک دو برابر عدد ماقبل است نوشته و بعد بهریک ۴ واحد میافزائیم تا حاصل شود ۴، ۷، ۱۰، ۱۶، ۲۸، ۵۲، ۱۰۰ بعد هریک از آنها را بر ۱۰ قسمت میکنیم حاصل میشود ۴، ۷، ۱۰، ۱۶، ۲۸ و ۱۰۰ این اعداد بتدریج نسبت فواصل سیارات را از خورشید بقاصله زمین از آن یا تقریباً کمی نشان میدهند .



# جدول ابعاد و وزن مخصوص سیارات شمسه

(در ستونهای ۲ و ۵ و ۷ مشخصات زمین همسای او به سطر ضمیمه اند)

م ۲۰۰

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷

نام	ابعاد		چگرم	وزن مخصوص	نسبت		وزن
	قطر ظاهری	قطر حقیقی			نسبت	نسبت	
سیارات	دائره	قطر حقیقی	چگرم	وزن مخصوص	نسبت	نسبت	وزن
بهر (عطارد)	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۵	۰/۰۰۵۶	۱/۱	۱/۱	۰/۰۰۱۱
بهر (زهره)	۰/۰۰۱۷	۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۹	۰/۰۰۸۱	۵	۵	۰/۰۰۱۷
زمین	-	۱	۱	۱	۰/۰۲	۱	۱
بهر (مریخ)	۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۵۴	۰/۰۰۷	۰/۰۰۸۱	۳/۸	۰/۰۲۹	۰/۰۰۳۱
کیوان (ستور)	۰/۰۰۴۸	۱/۱/۱۴	۱/۲۹۵	۱/۰۰۳۶	۱/۳۶	۰/۰۲۵۳	۰/۰۰۳۶
زهر (زحل)	۰/۰۰۲۰	۰/۰۰۹	۰/۰۰۶۵	۰/۰۰۹۵	۰/۰۰۷	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۷
اورانوس	-	۴	۰/۰۰۳۳	۰/۰۰۵۱	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۲۳	۰/۰۰۱۳
نپتون	۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۳	۰/۰۰۷۸	۰/۰۰۱۷	۱/۲	۰/۰۰۳۱	۰/۰۰۳۱

در ستونهای ۲ و ۵ و ۷

سیارات

# در تدوین این کتاب

از کتابهای ذیل استفاده شده است

نام نویسنده	نام کتاب
ابو ربیعان محمد پیرونی	۱- التفهیم
دکتر محمود مهران	۲- جبر
دکتر محمود مهران - محسن هنر بخش	۳- مکانیک
آقای رضا نجمی (مهندس المکات)	۴- هیئت
مرحوم علامه حسین رهنما	۵- حساب
TC. Jacquet	۶- خلاصه حساب
TC. AL.	۷- جبر
II. commissaire	۸- جبر و مثلثات
IC. Jacquet	۹- خلاصه جبر
II. Ferval	۱۰- مثلثات
Carlo Bourlet	۱۱- مثلثات
Réunion des professeurs	۱۲- مکانیک
IC. Jacquet	۱۳- خلاصه مکانیک
TC. AL.	۱۴- هندسه
II. commissaire	۱۵- هندسه
»	۱۶- هیئت
IC. Jacquet	۱۷- خلاصه هیئت
Réunion des professeurs	۱۸- هیئت
IC. Noelle et II. Schlam	۱۹- فورمولر
TC. Charnet	۲۰- فورمولر مکانیک

## غلطنامه

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۵	۱۰	باید	پایه
۵	۱۶	$an$	$a^n$
۵	۲۰	$(ab)^m$	$(ab)^m$
۱۷	۱۶	دوره	دوری
۱۸	۱۶	بین $a$ و $b$	همچنین بین $b$ و $d$
		$a$ و $c$	$c$ و $a$ گذاشته شود
۱۸	۱۶	بین $a$ و $b$	بین $a$ و $b$ گذاشته شود
۲۰	۴	$n\sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot \dots \cdot 1}$	$n\sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot \dots \cdot 1}$
۳۴	۱	..... $\sqrt{95}$	..... $\sqrt{95}$
۳۴	۱	..... $\sqrt{95}$	..... $\sqrt{95}$
۳۴	۱	باقیمانده	باقیمانده
۳۸	۴	$\sqrt{b}$	$a\sqrt{b}$
۴۳		سطر آخر	مقابل خط کسری قرار گیرد



غلط نامه	غلط	سنگار	۳۵۲
$\sqrt[1]{a^b}$	$\sqrt[1]{a^b}$	۲	۴۴
$a^m   m'$	$a^m   m'$	سوم از آخر	۴۴
$a^m   m'$	$a^m   m'$	سطر آخر	۴۴
$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$	$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$	۲	۴۵
فیتا	فیتا	۱۲	۴۸
$a^m   m$ واحد است	$a^m   m$	۲۱	۴۸
$a^m$	$a^m$	۲	۴۹
$S^r$	$S^r$	۲	۵۶
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	۱۲	۶۲
$\sqrt[n]{a}$	$\sqrt[n]{a}$	۱۲	۶۴
$\sqrt[n]{a}$	$\sqrt[n]{a}$	۲	۷۰
منتهی و با تنیس	منتهی و با تنیس	۳ از آخر	۷۱
$(a + r)^m$	$(a + r)^m$	۲ از آخر	۷۴
		۸	۷۹

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۷۹	سطر آخر	$(1+r)p \rightarrow 1$	$(1+r)p \rightarrow 1$
۸۰	۶	از	در
۸۰	سوم از آخر	حاصل	حامل
۸۳	در شکل ۶ محل تلاقی سه محور حرف $\theta$ گذاشته شود		
۸۳	۳	$r^3$	$r^2$
۸۴	۱۱	OPMP	OPMP'
۹۲	۱۱	V	V'
۹۳	۲	$mu'm \rightarrow 1$	$mu'u'm \rightarrow 1$
۹۳	۴	y	y'
۹۳	۱۱	y' =	y' =
۱۰۳	۲ از آخر	a	$\frac{x}{a}$
۱۰۴	۷ از آخر	و خارج هر دو کسر $a^2b' - a'b$ میباشد	
۱۰۷	۱۲	MM''	MM'
۱۰۹	۷ از آخر	$x - a$	$(x - a)$
۱۰۹	۲ از آخر	$\alpha, \beta$	$\alpha$ و $\beta$
۱۱۰	۴	$[a, f(a)]$	$[a \text{ و } f(a)]$
۱۱۰	۵	$f^2(a)$	$f'(a)$
۱۱۱	۲	$+\infty$	$+\infty$
۱۱۱	۲	sum	sumx

غلطنامه	غلط	سطر	دفعه
$y = \dots$	$y = \dots$	۴	۱۱۸
$\sqrt{1 - \sin^2 x}$	$\sqrt{1 - \sin^2 x}$	۵	۱۱۸
$\sin^2 x$	$\sin^2 x$	۶	۱۱۸
$\cot^2 x$	$\cot^2 x$	۶	۱۱۸
$y = \sin^2 x$	$y = \sin^2 x$	۸	۱۱۸
$\sqrt{\sin^2 x}$	$\sqrt{\sin^2 x}$	۸	۱۱۸
$y = \log^2 x = \frac{\log x}{\cos x}$	$y = \log^2 x = \frac{\log x}{\cos x}$	۹	۱۱۸
$b'c'$	$b'c'$ در مخرج	۵	۱۲۲
$\log \frac{b}{a}$	$\log \frac{a}{b}$	۷۰	۱۲۲
$a^{\log x}$	$a^{\log x}$	۲	۱۲۲
$a^{\log}$	$a^{\log}$	۲	۱۲۲
$M^{\log}$	$M^{\log}$ سطر آخر		۱۲۱
$\sqrt{K\pi}$	$\sqrt{K}$ از آخر	۴	۱۲۱
$\cot g a = \sqrt{K\pi}$	$\cot g a =$ از آخر	۴	۱۲۲
$a = \sqrt{K\pi}$	$K\pi$	۴	۱۲۴
$\sqrt{1 - \sin^2 x}$	$\sqrt{1 - \sin^2 x}$ از آخر	۴	۱۲۵
$\frac{b}{a}$	$\frac{a}{b}$	۷	۱۲۸
$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b}$	۹	۱۴۱

صفحه	مصحح	غلط	صحیح
۱۴۱	۳ از آخر	- b	a- b
۱۴۴	۳	P-o	P-b
۱۴۴	۲	obc	abc
۱۴۶	۵	l_c	l_c cos
۱۴۹	۲ از آخر	c	-c
۱۵۲	۷	cos y =	cos y = a
۱۵۳	۱۵	در خط از یک‌تو	خط از یک‌تو
۱۵۵	۷ از آخر	cos <sup>۳</sup> c	cos <sup>۲</sup> c
۱۵۶	۵	a.B	a.B
۱۵۸	دو شکل ۲ در محل تلاقی اضلاع a و b حرف B نوشته شود		
۱۷۳	۹ از آخر	M <sub>۱</sub>	M <sub>۱</sub>
۱۷۵	۵ از آخر	II-C	II-C
۱۷۵	۳ از آخر	AII	AII
۱۷۷	۲	-]	-]
۱۷۹	دو شکل ۶	مغایبه‌های B و C با هم عوض شوند	
۱۷۹	دو شکل ۷	به جای I حرف B نوشته شود	
۱۸۲	۴	ac- ba	ac- ba
۱۸۳	۴	قطر	اقطار
۱۸۵	۲ و ۵	√ o- v	√ o- v
۱۸۵	۲	a	a

۳۵۹	صفت	سطح	خط	صفت
۱۸۵	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۱۸۶	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۱۹۳	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۱۹۶	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۱۹۹	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۰۱	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۰۵	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۰۸	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۰۹	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۱۰	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۱۱	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۱۲	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۱۳	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۱۴	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۱۵	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۱۶	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۱۷	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۱۸	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۱۹	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۲۰	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۲۱	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۲۲	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۲۳	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۲۴	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۲۵	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۲۶	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۲۷	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۲۸	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۲۹	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۳۰	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۳۱	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۳۲	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۳۳	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۳۴	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۳۵	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۳۶	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۳۷	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۳۸	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۳۹	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۴۰	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۴۱	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۴۲	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۴۳	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۴۴	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۴۵	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۴۶	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۴۷	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۴۸	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۴۹	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۵۰	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۵۱	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۵۲	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۵۳	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۵۴	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۵۵	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۵۶	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۵۷	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲۵۸	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۲۵۸	نقطه تلاقی $A'M$ و $B'D$ را در (ش ۷) حرف $B$ بگذارید		صحیح
۲۶۰	۷ از آخر	خط مشترک	مشترک خط
۲۶۱	۷ از آخر	$OM$	$OM$
۲۶۲	۱۰ از آخر	در	دو
۲۷۰	۳ از آخر	ره	راه
۲۷۴	۵ از آخر	$nm'$	$nn'$
۲۷۶	۴	— صفحه	— از نقطه صفحه
۲۹۱	۵ از آخر	$\sqrt{R^2 \omega^2}$	$\sqrt{R^2 \omega^2}$
۲۹۲	۸ از آخر	$b''$	$f''$
۳۰۳	۶	دو	در
۳۰۷	۲ از آخر	$OR =$	$OR =$

## یادداشت

## یادداشت



## یادداشت



پندرہ

۱۵/۱۰



MUSLIM UNIVERSITY LIBRARY  
ALIGARH.

This Book is due on the date last stamped. An  
over-due charge of one anna will be charged for  
each day the book is kept over time.

---

۲۲/۱۰

